

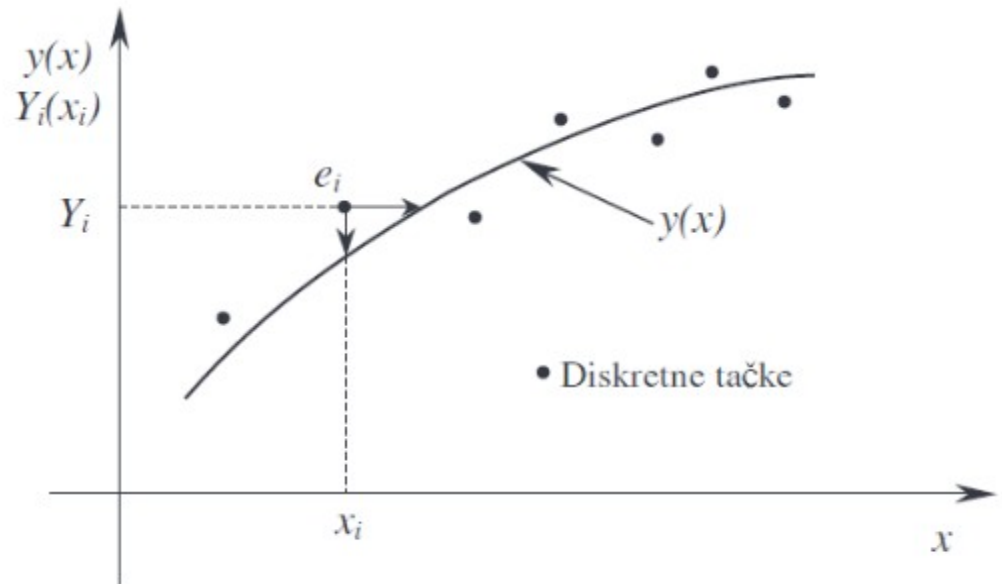
Aproksimacija funkcija

Aproksimacija funkcija

- Veliki broj podataka ili podaci nisu lepo grupisani
- Tačke (x_i, Y_i)
- Devijacija:

$$e_i = Y_i - y_i$$

$$y_i = f(x_i)$$



Metod najmanjih kvadrata

- Minimiziranje zbira kvadrata devijacija

$$S = \sum_{i=1}^N (e_i)^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - y_i)^2$$

- Aproksimaciona funkcija – linearna ili nelinearna (linearnost po parametrima)
- Linearna – polinom n-tog reda; nelinearna log/exp

Aproksimacija polinomom

- Dato N tačaka koje treba aproksimirati

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- Zbir kvadrata devijacija

$$\begin{aligned} S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^N (e_i)^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (Y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_nx_i^n)^2 \end{aligned}$$

Aproksimacija polinomom

- Uslov za postojanje ekstremuma (minimuma)

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^N 2(Y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_n x_i^n)(-x_i^k) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

- Sistem od n+1 linearnih jednačina

$$a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \dots + a_n \sum_{i=1}^N x_i^n = \sum_{i=1}^N Y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^N x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N x_i Y_i$$

.....

$$a_0 \sum_{i=1}^N x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{n+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^N x_i^{2n} = \sum_{i=1}^N x_i^n Y_i$$

Aproksimacija polinomom

Sistem rešava nekom od standardnih metoda

Npr. za aproksimaciju funkcijom $y = a + bx$ sistem postaje:

$$aN + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N Y_i$$
$$a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i Y_i$$

U praksi najčešće polinom prvog reda; višeg reda – često sistem slabo podešen; polinom 6. reda najčešće dobre rezultate; 6-10 red nekad dobri nekad ne, red 10+ najčešće loši rezultati

Zadatak 13

Odrediti približan izraz za zavisnost C_p od T za podatke date u tabeli. Koristiti metodu najmanjih kvadrata i aproksimativni polinom prvog reda u obliku $C_p = a + bT$

T, K	$C_p, J/mK \cdot 10^3$	$\overline{C_p}, J/mK \cdot 10^3$	Greška, %
300	1.0045	0.9948	-0.97
400	1.0134	1.0153	0.19
500	1.0296	1.0358	0.61
600	1.0507	1.0564	0.54
700	1.0743	1.0769	0.24
800	1.0984	1.0974	-0.09
900	1.1212	1.1180	-0.29
1000	1.1410	1.1385	-0.22

$$C_p = 0.933194 + 0.205298 \cdot 10^{-3}T$$

Zadatak 14

Odrediti približan izraz za zavisnost C_p od T za podatke date u tabeli. Koristiti metodu najmanjih kvadrata i aproksimativni polinom drugog reda u obliku $C_p = a + bT + cT^2$

T, K	$C_p, J/mK \cdot 10^3$	$\overline{C_p}, J/mK \cdot 10^3$	Greška, %
1000	1.1410	1.1427	0.15
1500	1.2095	1.2059	-0.29
2000	1.2520	1.2522	0.02
2500	1.2782	1.2815	0.26
3000	1.2955	1.2938	-0.13

$$C_p = 0.965460 + 0.211197 \cdot 10^{-3}T - 0.0339143 \cdot 10^{-6}T^2$$

Zadatak 15

Podatke aproksimirati relacijom $y = ae^{bx}$

x	0	1	2	3	4
y	3	6	12	24	48

Metod: $y = ax^b$

$$\ln(y) = \ln a + b \ln(x)$$

$$Y = \ln(y), A = \ln(a), X = \ln(x) \text{ i } B = b,$$

$$Y = A + Bx$$

tj. u ovom slučaju:

$$\ln(y) = \ln a + bx \Rightarrow Y = A + bx$$

Zadatak 15

▯ Zadatak postaje

x	0	1	2	3	4
y	3	6	12	24	48
$Y = \ln(y)$	1.098612	1.791759	2.484907	3.178053	3.871201

$$Y = A + Bx$$

$$Y = A + bx = 1.09861 + 0.69315x$$

$$y = ae^{bx} = e^A e^{bx} = e^{1.09861} e^{0.69315x} = 3e^{0.69315x}$$