

Keplerovi zakoni

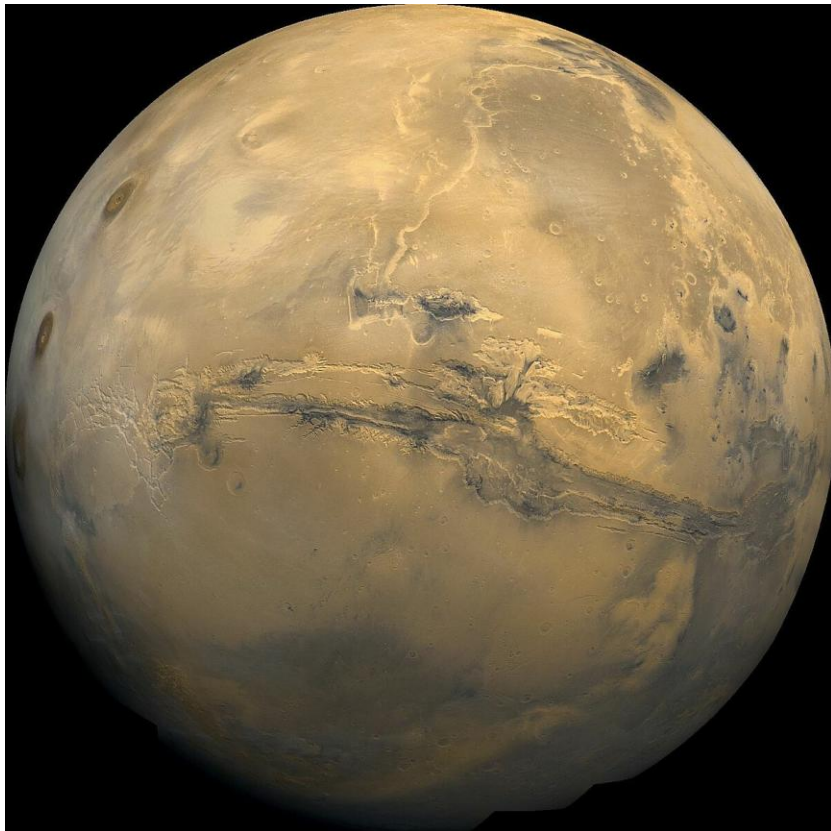
*(praktična primena)
od Marsa do supermasivne crne rupe*

Milan Milošević
Departman za fiziku
Prirodno-matematički fakultet u Nišu

www.mmilan.com

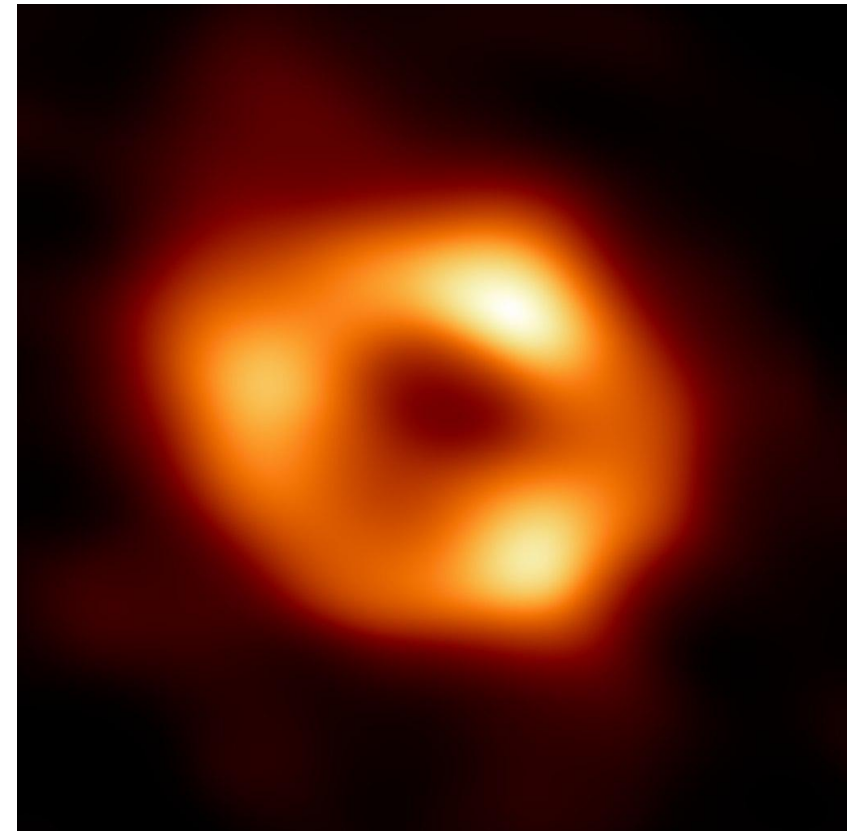
Svetska nedelja svemira 2025
Naučni klub Niš, 13. oktobar 2025. god

Šta imaju zajedničko?



Mozaik od 102 fotografije koje je snimio Viking 1
Orbiter, orbita 1.334, 22 februar 1980

Credit: [NASA / USGS](#)



Prva fotografija Sgr A*, SMBH u centru naše
galaksije (12. maj 2022)

Credit: [EHT Collaboration](#)

Kratka istorija astronomije

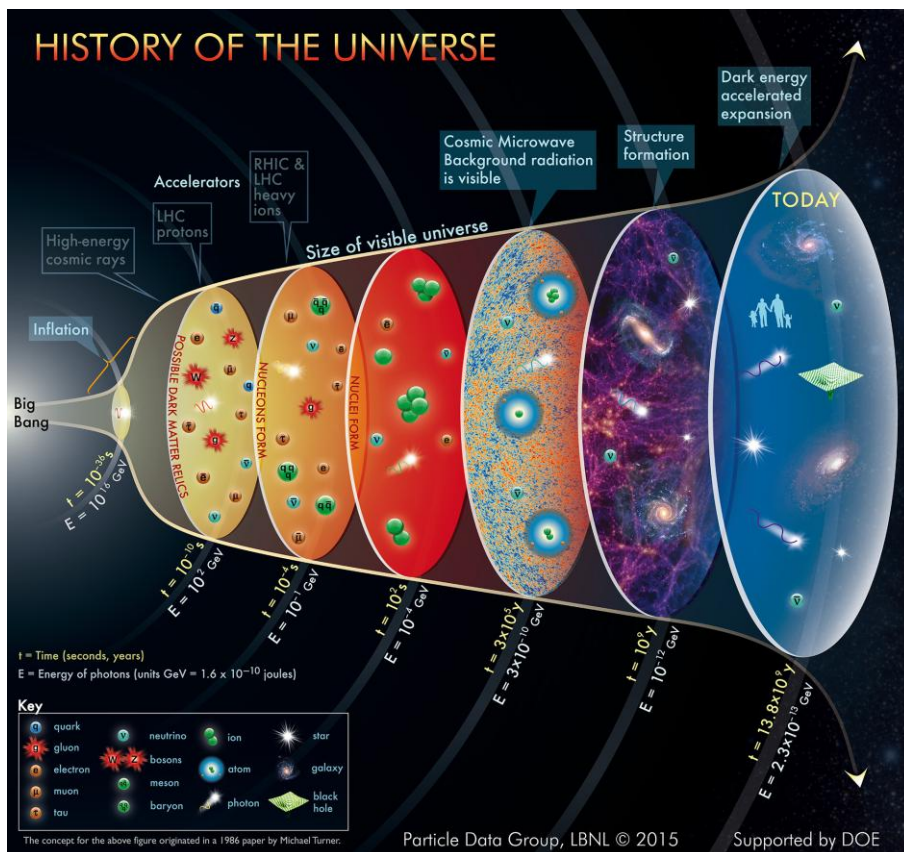


Image: [Particle Data Group, LBNL](#)

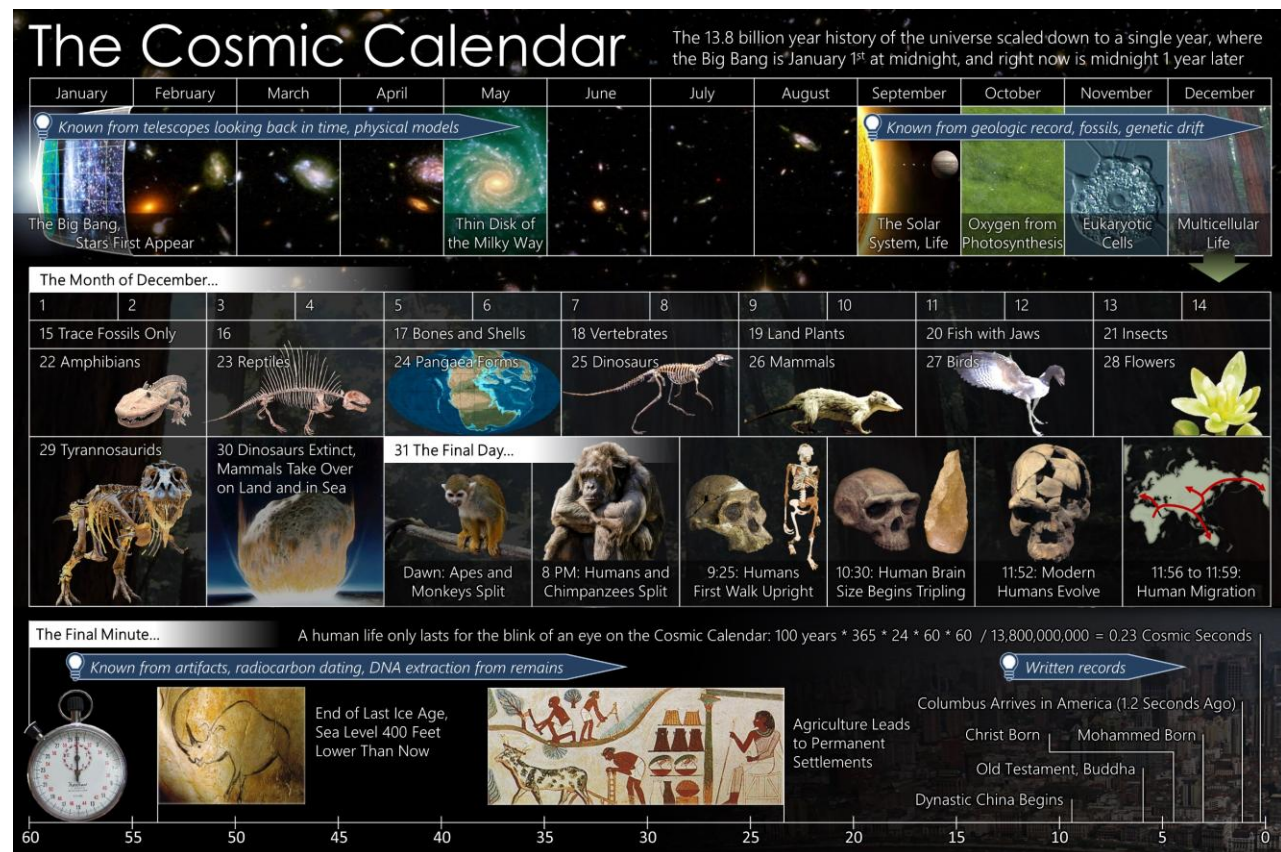
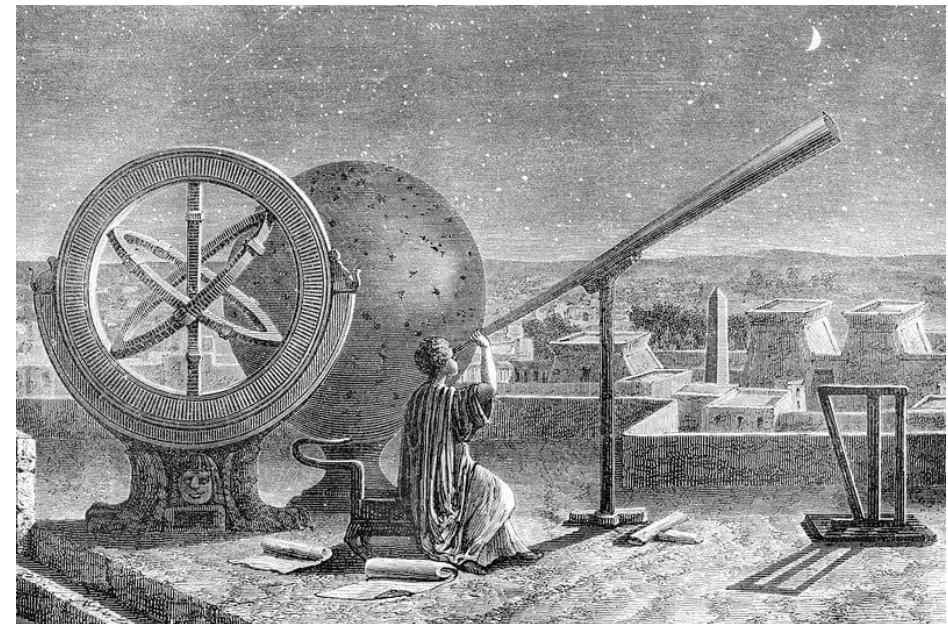
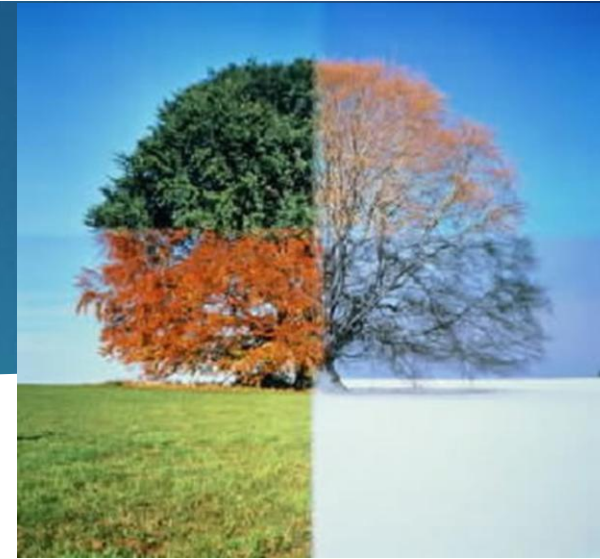


Image: [Eric Fisk / Wikipedia](#)

Šta je astronomija?

- ▶ Veza između nebeskih ciklusa i životnih ciklusa
- ▶ Postojala je potreba da se predvide događaji na Zemlji na osnovu pojava na nebu.
- ▶ Astronomija je počela da se razvija u okviru astrologije, ali je danas kao nauka potpuno odbacuje.

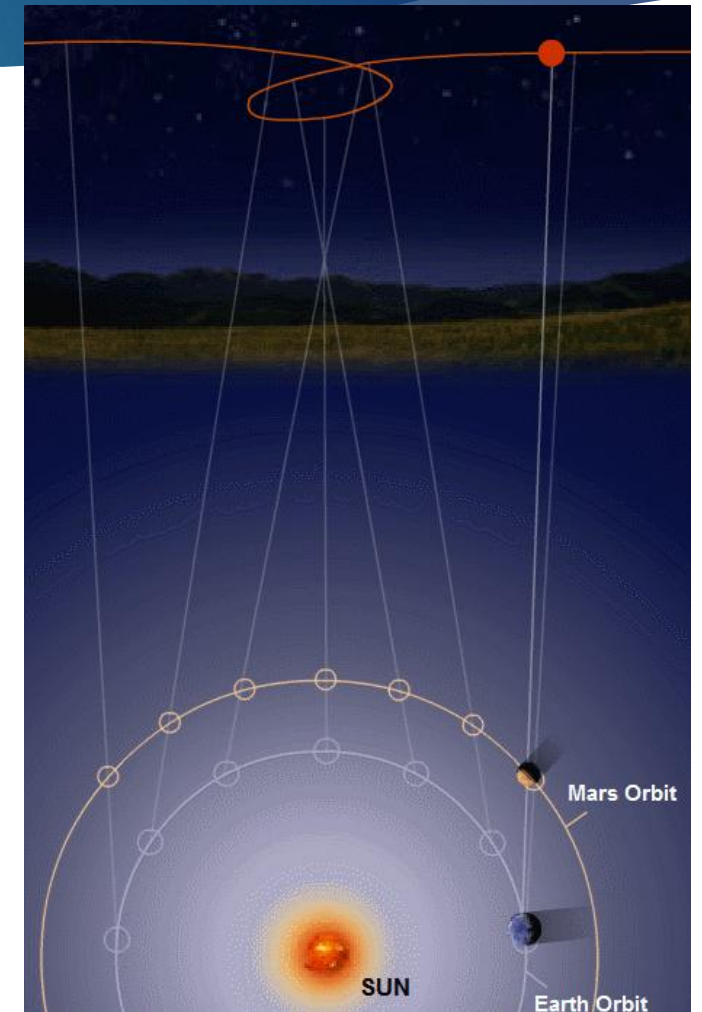


Gravura grčkog astronoma Hiparha (oko 190–120. p. n. e.) iz dela *Vies des Savants Illustres* (1877).

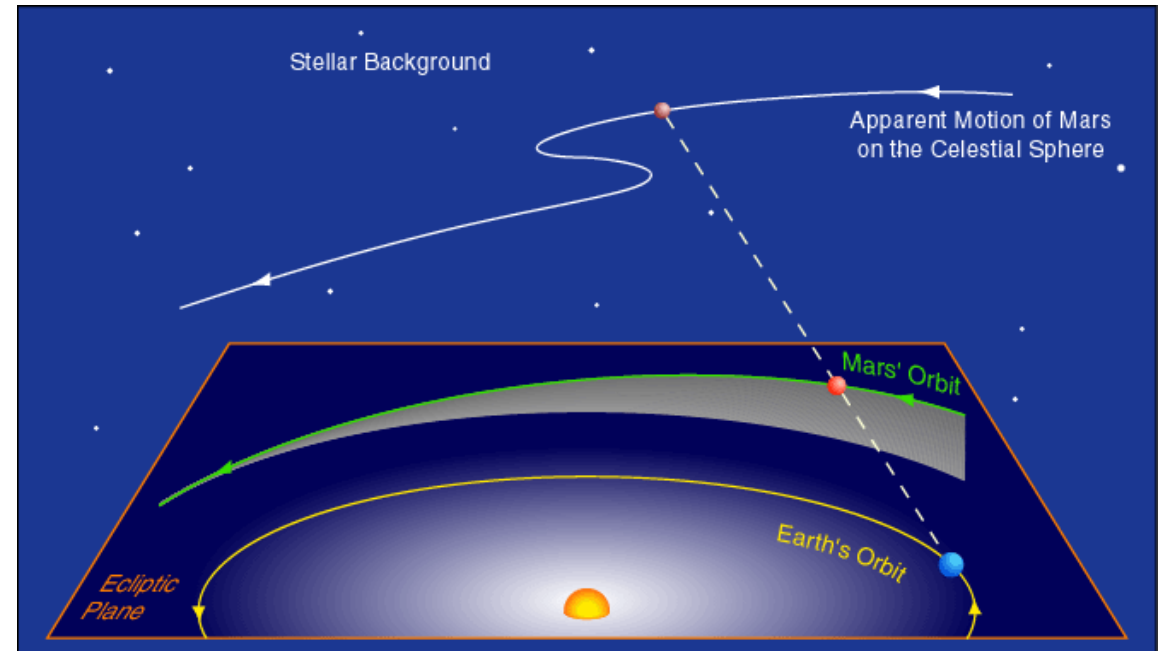
Izvor: M. Lopez, [The Epicycles of Ancient Astronomy](#)

Sve je počelo sa planetama

- ▶ Kretanje nebeske sfere - dugo se verovalo da je Zemlja centar svemira
- ▶ Brojni modeli geocentričnog sistema
- ▶ Reč „planeta“ potiče od grčke reči Πλανήτης („*planitis*“), što znači „*lutalica*“
 - ▶ Razlog: godišnje kretanje po nebu i stvaranje „petlji“ u svom prividnom hodu.

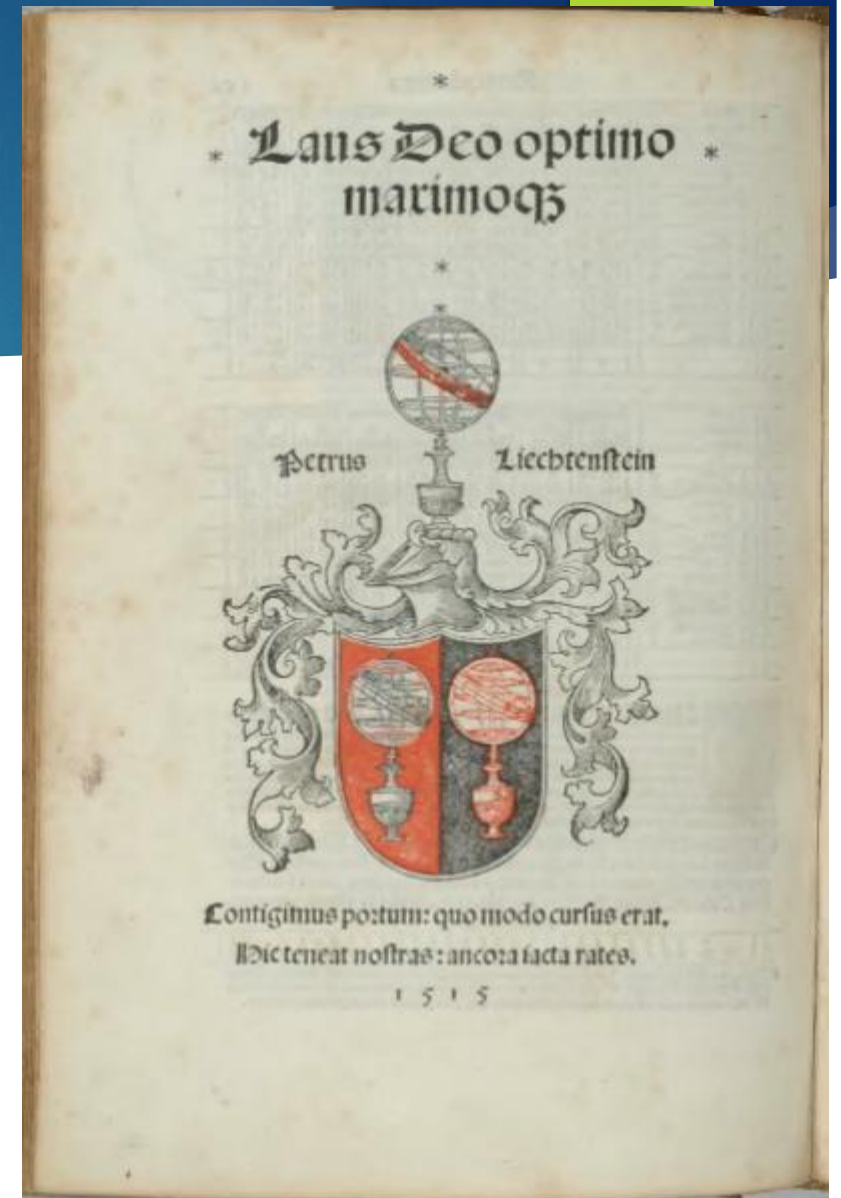


Prividno kretanje planeta



Geocentrični model

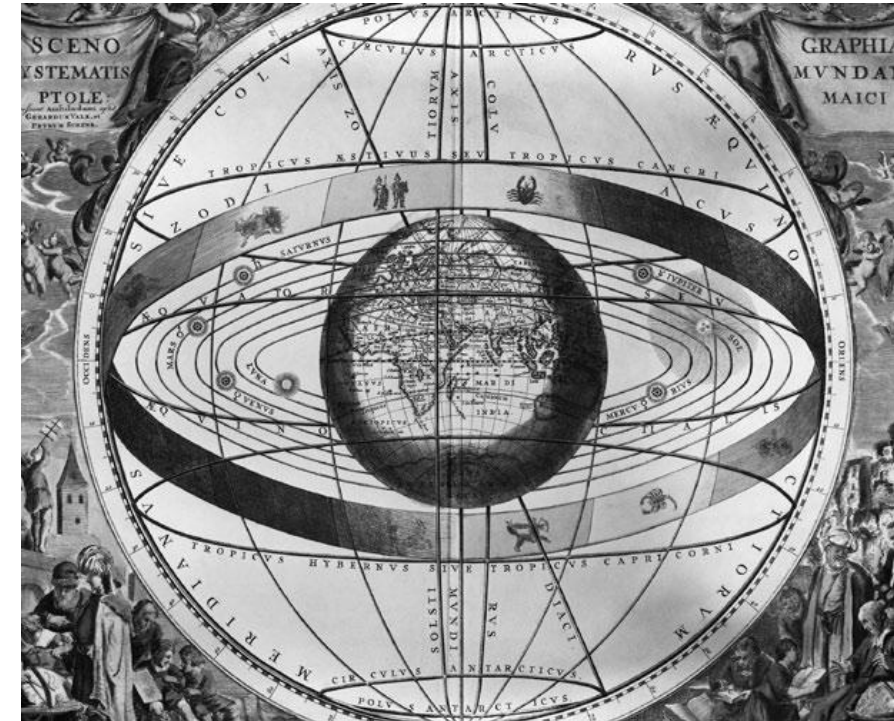
- ▶ Aristotel (384-382. p. n. e.) i Ptolomej (90-168. n. e.)
 - ▶ "Almagest" - matematičko i astronomsko delo iz 2. veka o prividnim kretanjima zvezda i putanjama planeta
- ▶ **Zemlja** - sfernog oblika, nalazi se u središtu. Oko nje se nalaze **sfere**: po **jedna za svaku planetu**, za Sunce, Mesec i poslednja za nepokretne zvezde.
- ▶ **Zvezde** su pričvršćene za nebesku sferu, sa Zemljom u njenom centru, dok se Sunce i planete (tzv. „lutalice“) okreću oko Zemlje.



Almagest, 1515 na latinskom, Petrus Lichtenstein (publisher)

Ptolomejev model

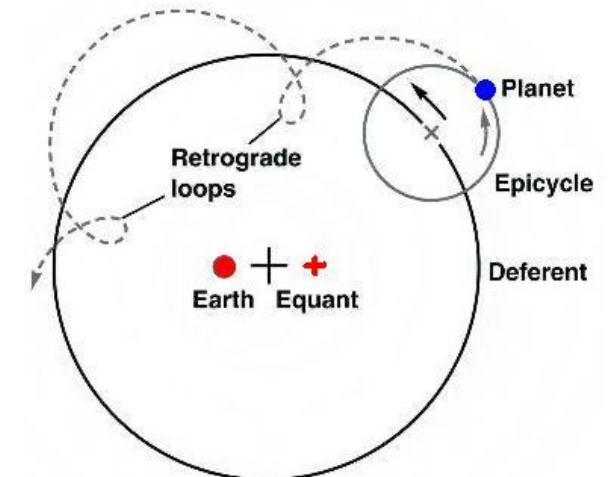
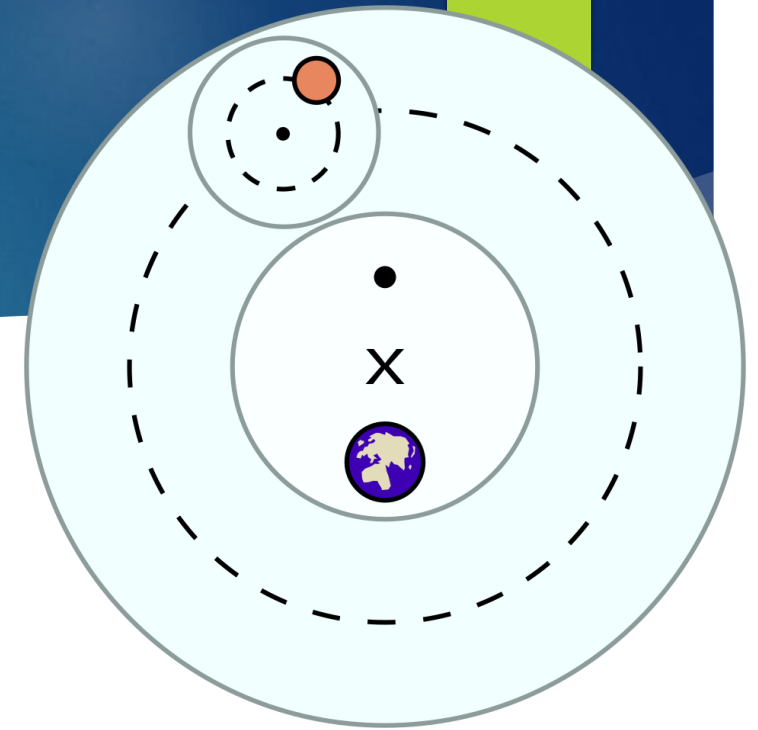
- ▶ **Geocentrični svemir**
- ▶ Prihvatio je Aristotelovu ideju da se Sunce i planete okreću oko sferne Zemlje.
- ▶ Tu ideju je dalje razvio posmatranjima i matematičkim objašnjenjima.
- ▶ Odbacio je hipotezu Aristarha sa Samosa da se Zemlja okreće oko Sunca, jer za to nije mogao da pronađe dokaze.
- ▶ Na osnovu posmatranja golim okom, svemir je zamišljen kao skup ugnežđenih, providnih sfera, sa Zemljom u centru.
 - ▶ Oko nje se kreću Mesec, Merkur, Venera i Sunce.
 - ▶ Iza Sunca nalaze se Mars, Jupiter i Saturn - jedine planete vidljive golim okom.
- ▶ Iza Saturna nalazi se poslednja sfera, na koju su pričvršćene sve zvezde, i ona se okreće oko ostalih sfera.



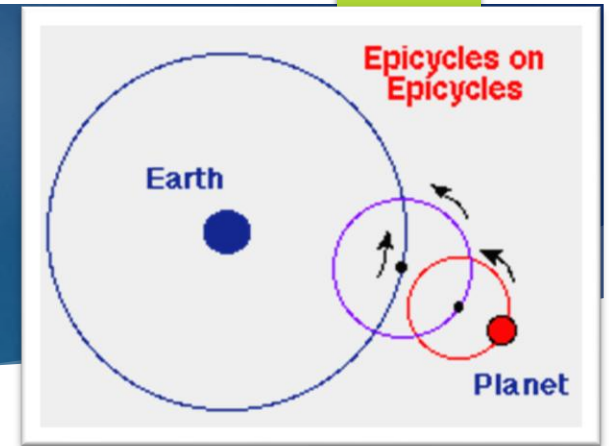
Map of the Universe according to Ptolemy, from a 17th-century Dutch atlas by Gerard Valck © Bettmann/CORBIS

Ptolomejev model – novo?

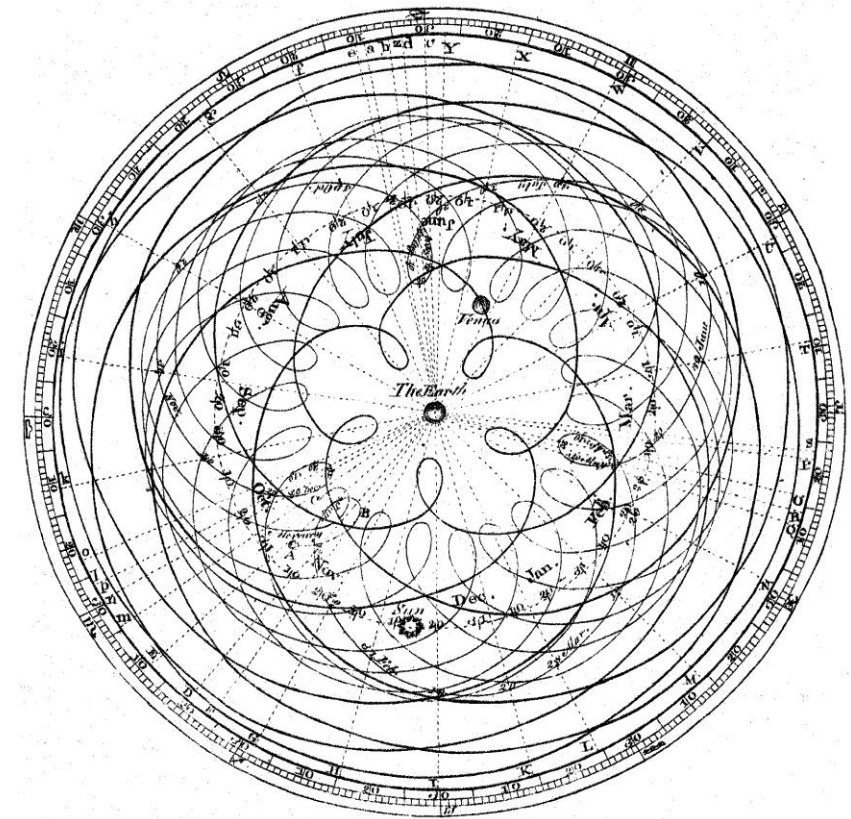
- ▶ Nebeska tela se kreću oko Zemlje po velikim krugovima koji se nazivaju **deferenti**.
- ▶ Kretanje planeta u vidu „petlji“ uključuje manje krugove, tzv. **epicikle**.
- ▶ Centri epicikala se pomeraju duž deferenata.
- ▶ Osnovni elementi (gornja desna slika):
 - ▶ planeta se okreće po epiciklu koji se nalazi na deferentu unutar kristalne sfere.
 - ▶ Centar sistema označen je slovom **X**, dok je Zemlja blago pomerena iz centra.
 - ▶ Nasuprot Zemlji nalazi se **ekvantna tačka** - oko nje se deferent planete prividno okreće.



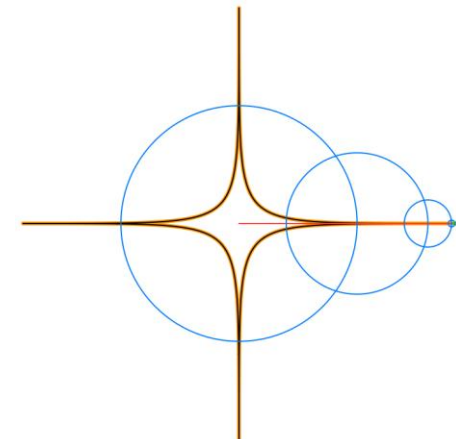
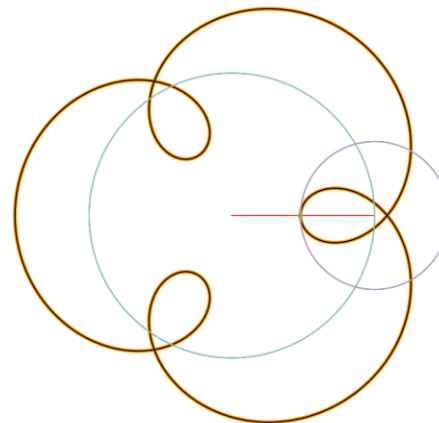
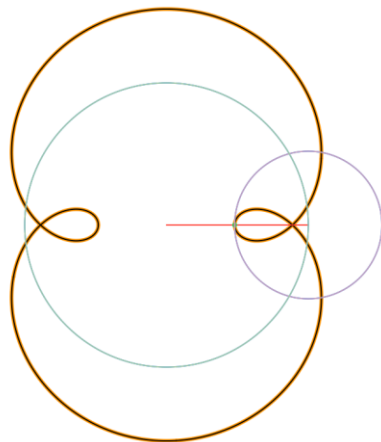
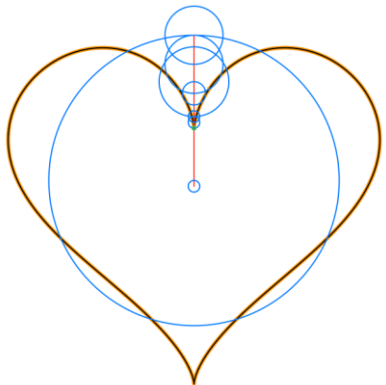
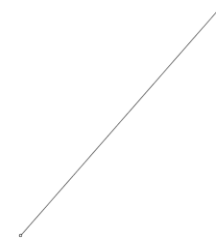
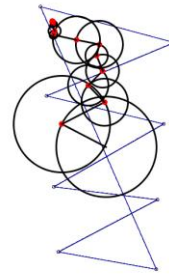
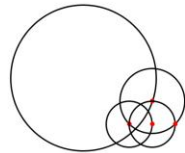
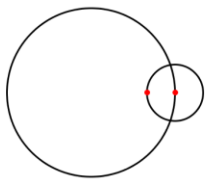
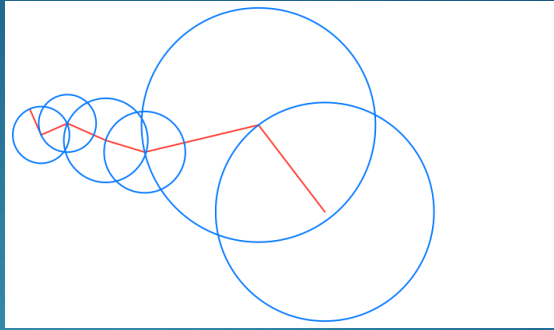
Ptolomejev model – novo?



- ▶ Ptolomejevi proračuni „petlji“ nisu se slagali sa posmatranjima.
- ▶ Ispravke modela uključivale su uvođenje novih epicikala - pa čak i epicikala na epiciklima.
 - ▶ Mogli bismo to nazvati i „stepenima slobode“, zar ne? 😊
- ▶ Posle 14 vekova broj epicikala narastao je na oko 80.
- ▶ Model je bio veoma složen, ali nije prikazivao stvarnu sliku neba.



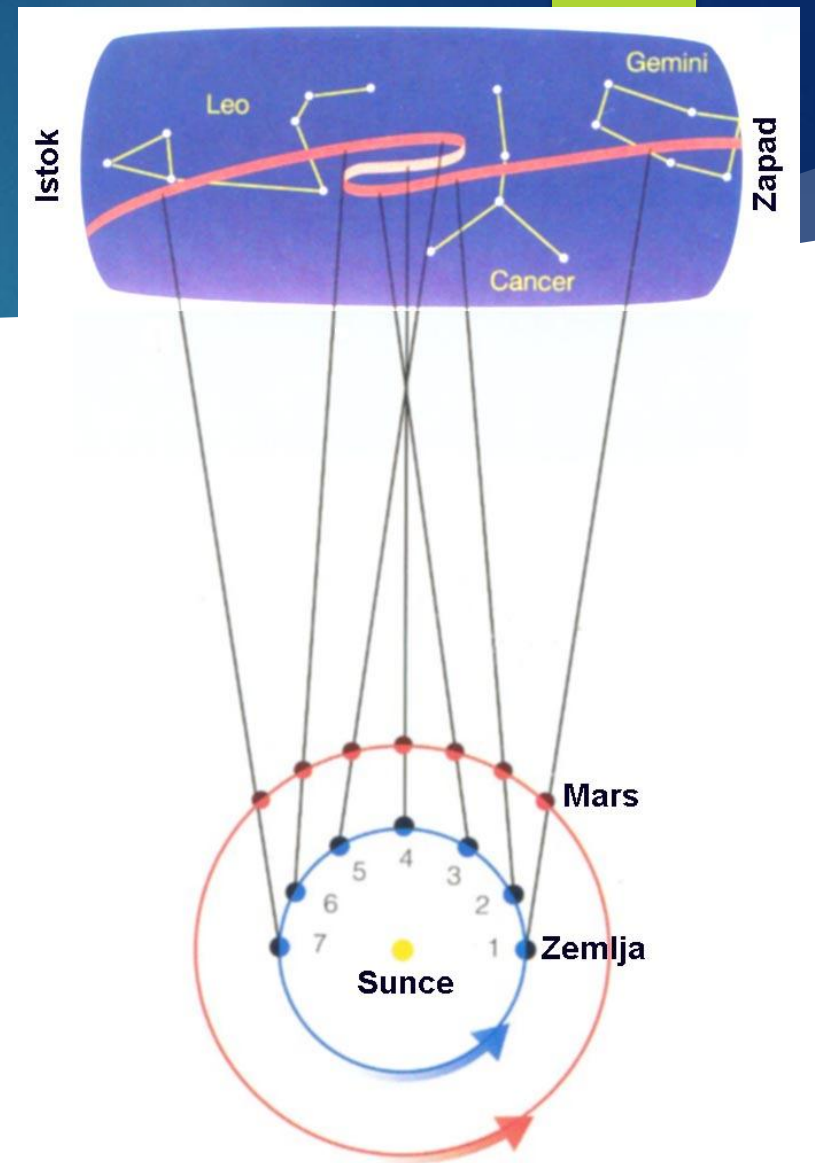
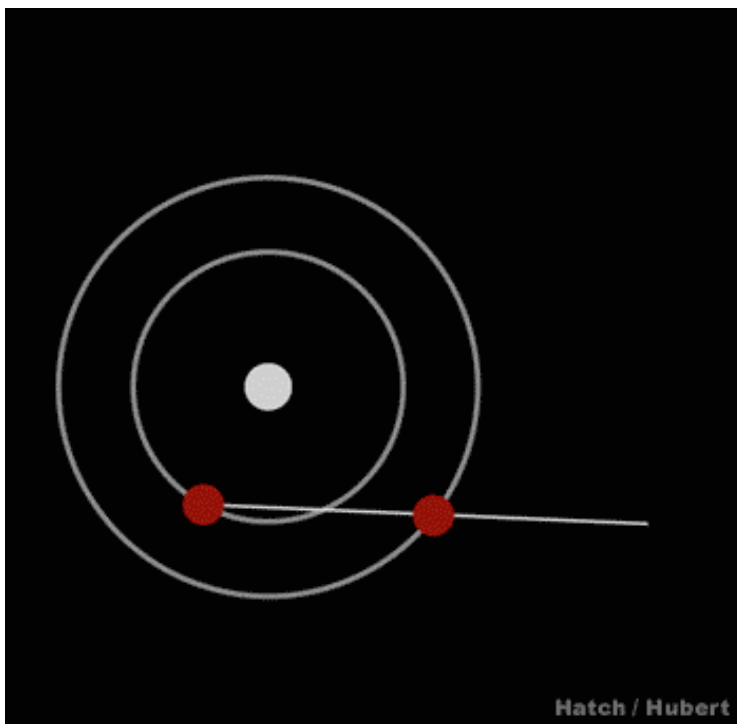
Medūtim...



- M. Lopez, [*The Epicycles of Ancient Astronomy*](#)
- [*Epicycles - Experiment with complex Fourier series*](#)

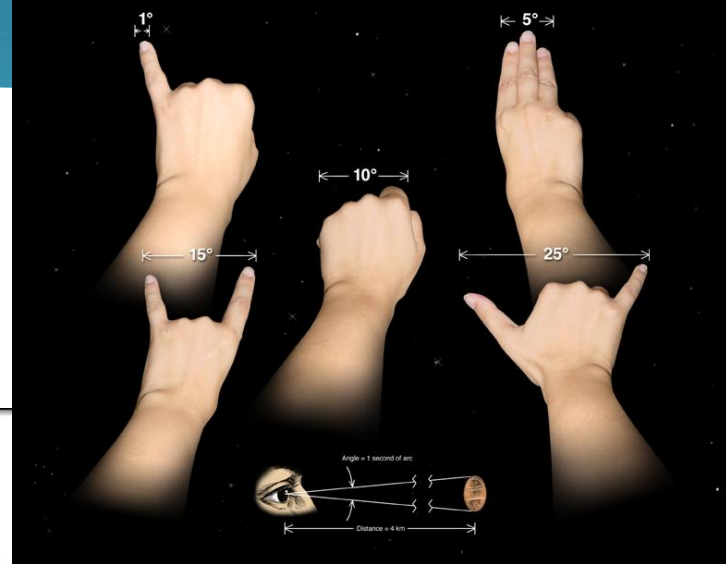
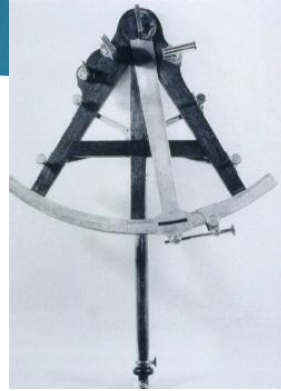
Nazad u budućnost...

- Heliocentrični sistem

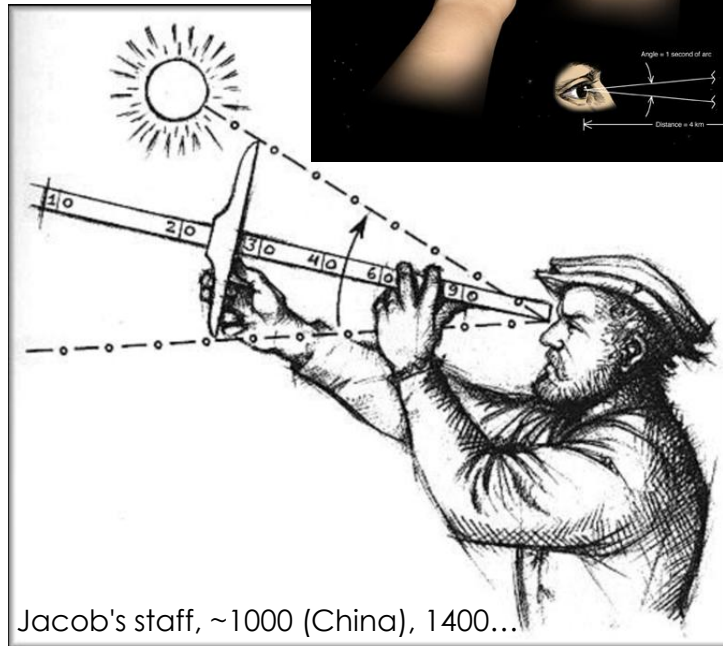


Dobra ideja, ali kako dokazati?

Sextant, 1760 i 1800+...



Quadrant, 1450 (oko 1200. godine).

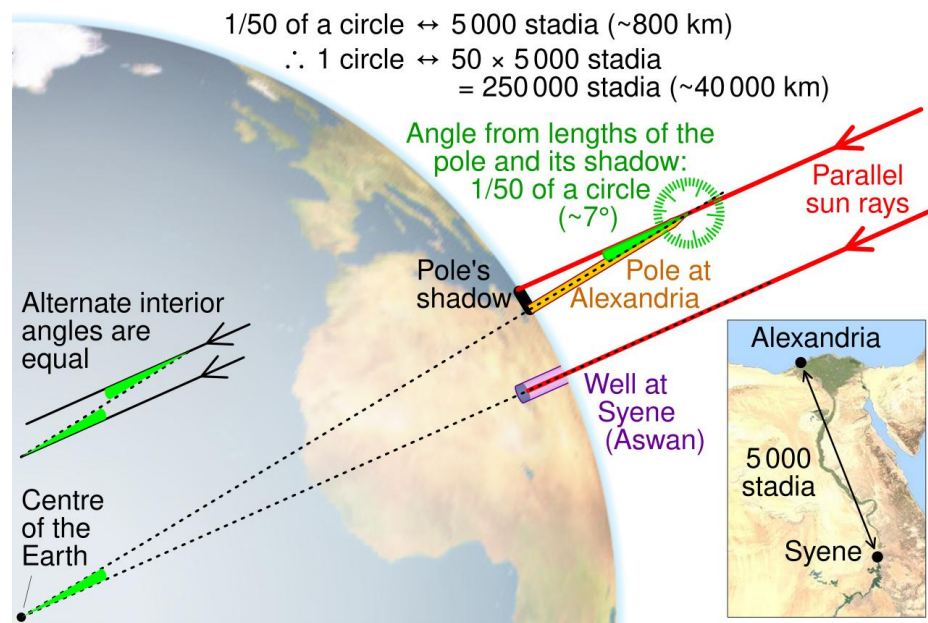


Jacob's staff, ~1000 (China), 1400...



Šta možemo samo sa uglovima?

► Da izmerimo obim Zemlje



Izvor: [Wikimedia Common](#)



Nešto više astronomski

Stellarium 24.2

Polaris (Alrucaba - Cynosura - Cynosura - Tramontana - Yılduz - Mismar - Star of Arcady)
α UMi - 1 UMi - WRH 39 - Σ 93 - HIP 11767 - HR 424 - HD 8890 -
SAO 308 - WDS J02318+8916

Type: double star, pulsating variable star (DCEPS)
Magnitude: 1.95 (reduced to 2.14 by 1.46 Airmasses)
Absolute Magnitude: -3.66
Colour Index (B-V): 0.63
Magnitude range: 1.86+2.13 (Photometric system: V)
RA/Dec (J2000.0): 2h32m30.96s/+89°15'34.3"
RA/Dec (on date): 2h32m41.48s/+89°21'47.7"
HA/Dec: 16h48m05.20s/+89°22'08.6" (apparent)
Az./Alt.: +0°49'24.5"/+43°07'46.7" (apparent)
Gal. long./lat.: +123°17'05.9"/+26°27'29.5"
Supergal. long./lat.: +25°45'02.6"/+15°24'08.0"
Ecl. long./lat. (J2000.0): +88°33'44.5"/+66°05'48.6"
Ecl. long./lat. (on date): +88°54'24.0"/+66°06'00.1"
Ecliptic obliquity (on date): +23°26'19.2"
Mean Sidereal Time: 19h46m41.9s
Apparent Sidereal Time: 19h46m41.7s
Rise: —
Transit: 5h21m
Set: —
Circumpolar (never sets)
Max. E. Digression: Az.=+0°52'31.0", HA= 18h02m24.14s
Max. W. Digression: Az.=+359°07'29.0", HA= 5h57m35.86s
IAU Constellation: UMi
Distance: 432.57±6.22 ly
Proper motion: 46.03 mas/yr towards 104.9°
Proper motions by axes: 44.48 -11.85 (mas/yr)
Parallax: 7.54±0.110 mas
Spectral Type: F8Ib
Period: 3.9696 days
Next maximum light: 2024-08-26 19:34:10 UTC
Rising time: 50% (1d 23h 38m 6.7218s)
Position angle (2016): 103.06°
Separation (2016): 39.000"
Solar Az./Alt.: +317°14'15"/-25°57'12"
Lunar Az./Alt.: +55°51'23"/-1°39'45"

Date and time		Julian Day	
2024	8	22	0
2024	8	22	0

Earth, Nis, 194 m

FOV 83.7° 17.9 FPS 2024-08-25 22:00:47 UTC+02:00

Stellarium 24.2

Polaris (Alrucaba - Cynosura - Cynosura - Tramontana - Yılduz - Mismar - Star of Arcady)
α UMi - 1 UMi - WRH 39 - Σ 93 - HIP 11767 - HR 424 - HD 8890 -
SAO 308 - WDS J02318+8916

Type: double star, pulsating variable star (DCEPS)
Magnitude: 1.95 (reduced to 2.15 by 1.55 Airmasses)
Absolute Magnitude: -3.66
Colour Index (B-V): 0.63
Magnitude range: 1.86+2.13 (Photometric system: V)
RA/Dec (J2000.0): 2h32m32.45s/+89°15'34.4"
RA/Dec (on date): 2h32m43.81s/+89°21'47.9"
HA/Dec: 15h56m53.78s/+89°22'25.3" (apparent)
Az./Alt.: +0°42'20.8"/+40°19'15.6" (apparent)
Gal. long./lat.: +123°17'06.2"/+26°27'29.7"
Supergal. long./lat.: +25°45'02.9"/+15°24'07.8"
Ecl. long./lat. (J2000.0): +88°33'45.2"/+66°05'48.4"
Ecl. long./lat. (on date): +88°54'25.0"/+66°06'00.0"
Ecliptic obliquity (on date): +23°26'19.1"
Mean Sidereal Time: 18h54m35.2s
Apparent Sidereal Time: 18h54m35.1s
Rise: —
Transit: 6h13m
Set: —
Circumpolar (never sets)
Max. E. Digression: Az.=+0°50'20.9", HA= 18h02m11.18s
Max. W. Digression: Az.=+359°09'39.1", HA= 5h57m48.82s
IAU Constellation: UMi
Distance: 432.57±6.22 ly
Proper motion: 46.03 mas/yr towards 104.9°
Proper motions by axes: 44.48 -11.85 (mas/yr)
Parallax: 7.54±0.110 mas
Spectral Type: F8Ib
Period: 3.9696 days
Next maximum light: 2024-08-26 19:34:10 UTC
Rising time: 50% (1d 23h 38m 6.7218s)
Position angle (2016): 103.00°
Separation (2016): 39.000"
Solar Az./Alt.: +303°58'19"/+20°06'33"
Lunar Az./Alt.: +33°56'06"/-15°36'18"

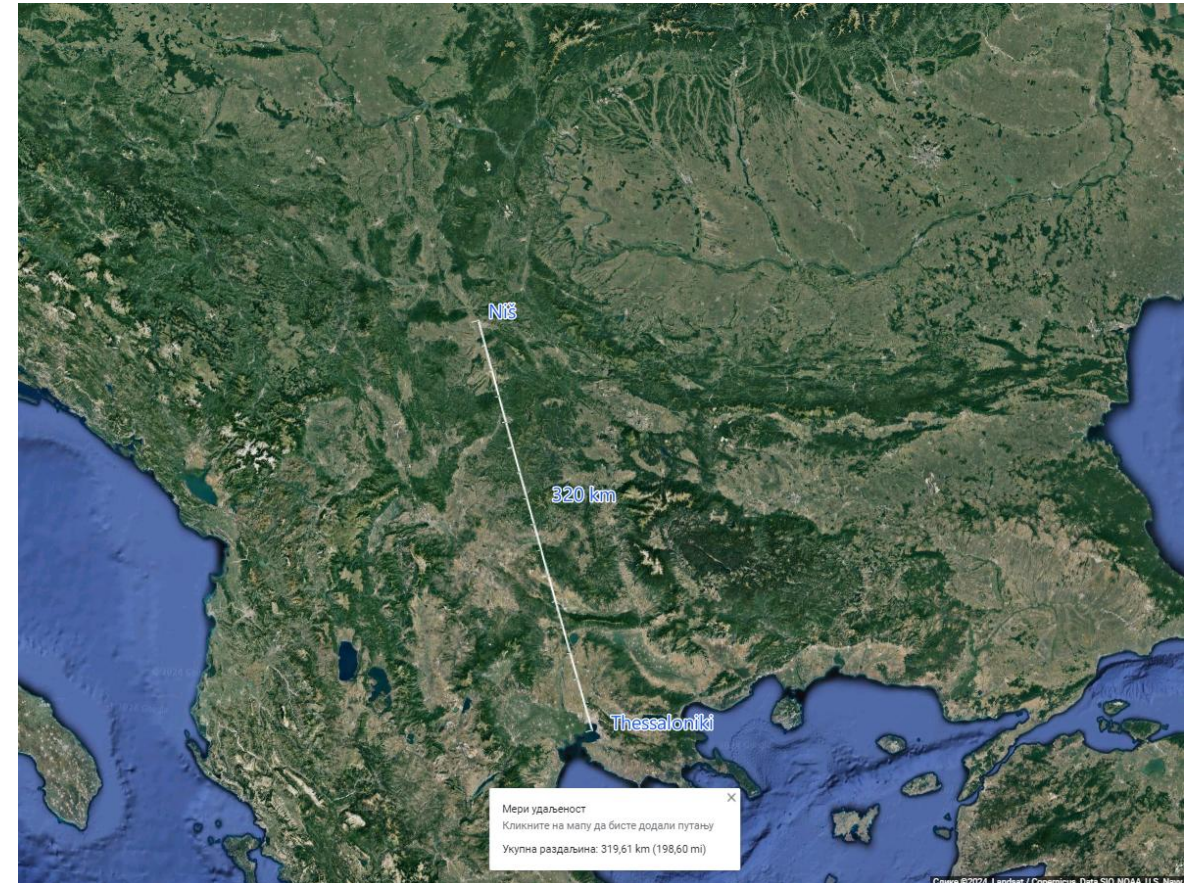
Date and time		Julian Day	
2024	8	22	0
2024	8	22	0

Earth, Thessaloniki, 8 m

FOV 83.7° 54.5 FPS 2024-08-26 22:00:47 UTC+03:00

Putovanje...

- ▶ Ugao „Severnjače“ (Polaris)
 - ▶ Niš: $43^{\circ} 07' 46.7''$
 - ▶ Solun: $40^{\circ} 19' 15.6''$
 - ▶ **Razlika:** $\Delta\phi = 43,13 - 40,32 = 2,81$
- ▶ $s = 320 \text{ km}$
- ▶ $L_{Earth} = 2\pi R = \frac{360^{\circ}}{\Delta\phi} \cdot s \approx 128,1 \cdot 320 = 40.996 \text{ km}$
- ▶ $R \approx 6.528 \text{ km}$
- ▶ $s_{road} = 410 \text{ km}$ $L_{road} = 52.521 \text{ km}$ $R_{road} = 8.363 \text{ km}$
- ▶ $R_{real} = 6.378 \text{ km}$



Tiho Brahe (1546 - 1601)

- ▶ Poslednji veliki astronom koji je radio bez pomoći teleskopa.
- ▶ Tokom života bio je poznat kao **astronom, astrolog i alhemičar**.
- ▶ Sa samo 14 godina (21. avgusta 1560), bio je očaran prizorom **pomračenja Sunca** - događajem koji je probudio njegovu doživotnu strast prema astronomiji.
- ▶ Posebno ga je impresionirala činjenica da je pomračenje bilo **predviđeno unapred**, iako je prema tadašnjim podacima proračun kasnio **jedan dan**.
- ▶ Tada je shvatio da će **preciznija posmatranja** biti ključ za tačnija predviđanja.
- ▶ Sa 19 godina izgubio je deo nosa u dvoboju zbog matematičkog neslaganja.
- ▶ Ostatak života nosio je protezni nos, napravljen od mesinga¹ (legure bakra i cinka), koji je pričvršćivao pastom od pšenice ili lepljivom smesom.
- ▶ Za svečane prilike koristio je verzije od srebra i zlata.

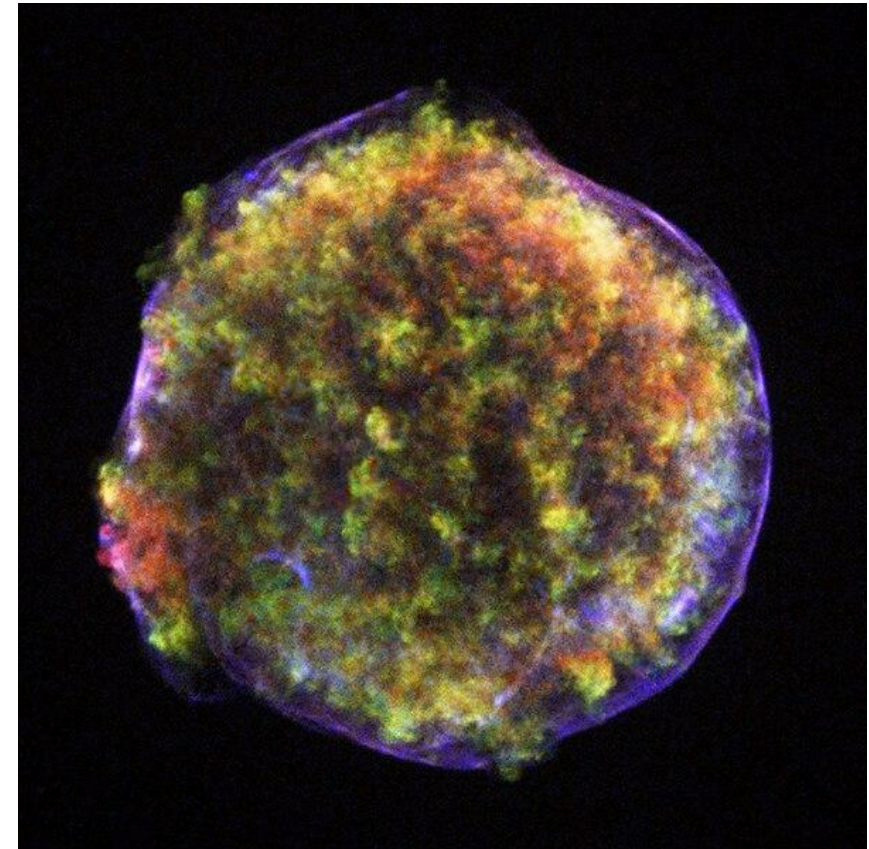


Tycho Brahe (ulje na platnu, 1596)

¹Danski i Češki istraživači, Novembar 2012

Tiho Brahe (1546 - 1601)

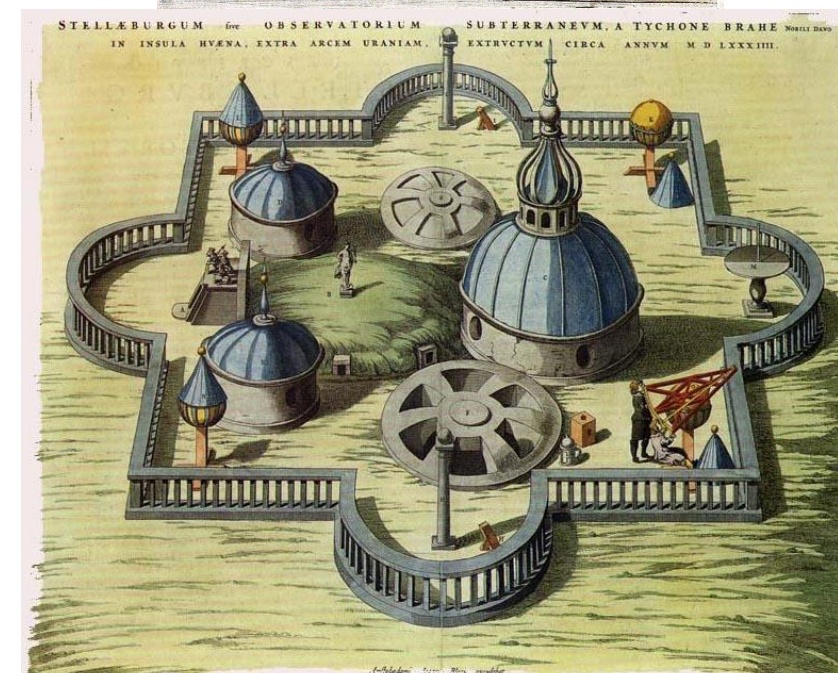
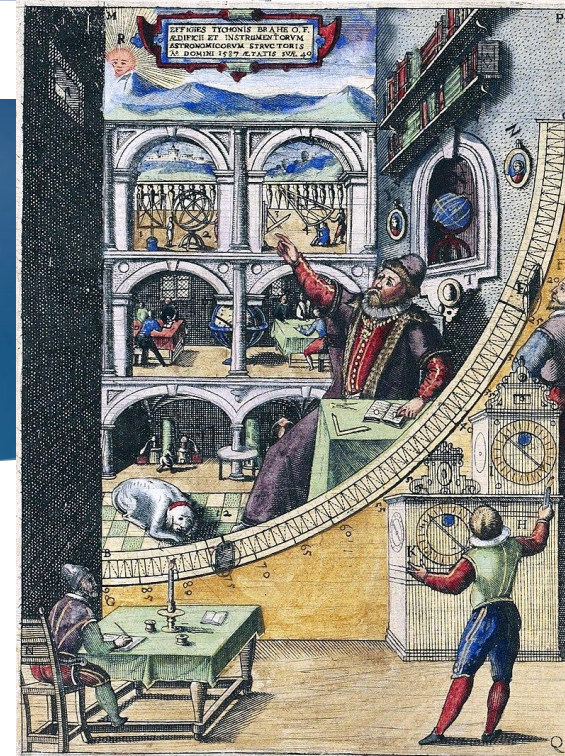
- ▶ Dana **11. novembra 1572. godine**, Tycho je posmatrao veoma sjajnu zvezdu, danas poznatu kao **SN 1572**, koja se iznenada pojavila u sazvežđu Kasiopeja.
 - ▶ **Drevno verovanje:** Nebeski svod iznad Meseca smatrao se nepromenljivim (Aristotelovo shvatanje).
 - ▶ **Tychova opservacija:** Nije uočena dnevna paralaksa u odnosu na nepokretne zvezde - objekat je bio dalje od Meseca i planeta.
 - ▶ **Ključni zaključak:** Objekat se nije pomerao u odnosu na nepokretne zvezde; nije bila planeta, već verovatno udaljena zvezda.
 - ▶ **De nova stella (1573):** Tycho je uveo termin „nova“ za novu zvezdu - danas znamo da je to **bila supernova** udaljena oko 7.500 svetlosnih godina.
 - ▶ **Značaj:** Ovo otkriće bilo je presudno za njegovu odluku da se posveti astronomiji; Tycho je postao poznat širom Evrope.
 - ▶ **Kritika:** Tycho je oštro kritikovao one koji su umanjivali značaj ovog otkrića.



Tycho's Supernova Remnant
([NASA/CXC/Rutgers/J.Warren & J.Hughes et al.](#))

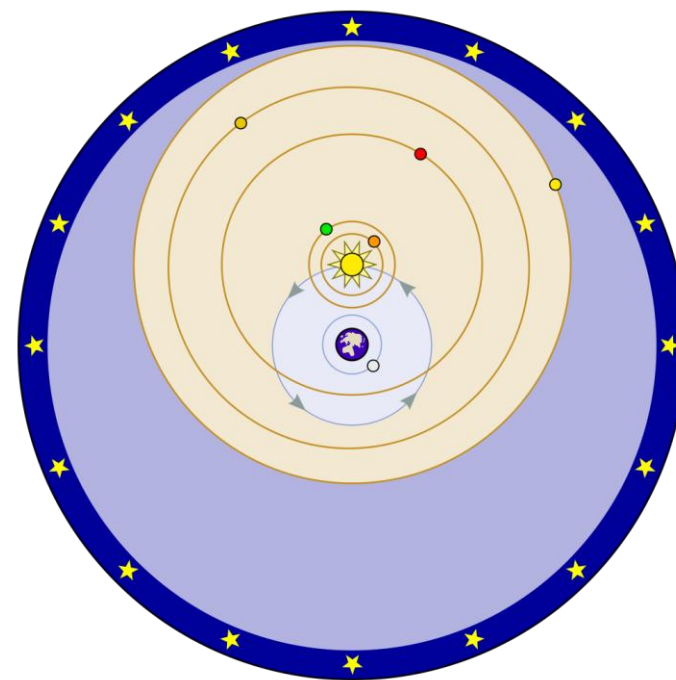
Tiho Brahe (1546 - 1601)

- ▶ **Manastir Herrevad:** Uz podršku ujaka Stena Bilea izgradio je opservatoriju i alhemijsku laboratoriju; pomagla mu je sestra Sofi Brahe.
- ▶ **Podrška kralja:** Priznao ga je kralj Frederik II, koji je predložio izgradnju opservatorije na ostrvu Hven.
- ▶ **Uraniborg (1576):** Izgradio je prvu veliku opservatoriju u hrišćanskoj Evropi, strateški smeštenu radi osame i posvećenog istraživanja.
- ▶ **Doba pre teleskopa:** Tycho je posmatrao planete, Mesec i zvezde golim okom, prikupljajući opsežne i veoma precizne podatke o zvezdama.
- ▶ **Značaj Uraniborga:** Omogućio mu je da razvije tačne modele Sunčevog sistema i postavi temelje za buduće astronome.
- ▶ **1597:** Napustio je ostrvo Hven posle neslaganja sa kraljem Kristijanom IV; preselio se u Prag, gde ga je car Rudolf II postavio za dvorskog matematičara.
- ▶ **Nasleđe:** Uraniborg je ostao značajna prekretnica u istoriji astronomije.



Tiho Brahe (1546 - 1601)

- ▶ Bio je **prvi koji je predavao Kopernikovu teoriju** u Danskoj.
- ▶ Međutim, nije uspeo da **uskadi Kopernikov sistem sa Aristotelovom fizikom**.
- ▶ Ukazao je na **netačnosti u Kopernikovim posmatračkim podacima**.
- ▶ Predložio je model u kojem se Sunce i Mesec okreću oko Zemlje, dok se ostale planete okreću oko Sunca — tzv. **geo-heliocentrični sistem**.
- ▶ Njegov pristup je **spajao posmatračke i proračunske prednosti Kopernikovog sistema**.
- ▶ Time je ponudio **alternativu astronomima** koji su bili neodlučni da prihvate heliocentrizam.



Johan Kepler (1571 - 1630)

- ▶ Nemački astronom, matematičar, astrolog, prirodni filozof i pisac muzike.
- ▶ Jedna od ključnih ličnosti **naučne revolucije 17. veka**, najpoznatiji po svojim **zakonima kretanja planeta** i delima ***Astronomia nova***, ***Harmonice Mundi*** i ***Epitome Astronomiae Copernicanae***.
- ▶ Njegov rad je snažno uticao na Isaka Njutna, pruživši jedan od temelja za njegovu teoriju univerzalne gravitacije.
- ▶ Smatra se jednim od osnivača moderne astronomije, naučne metode i prirodnih nauka.
- ▶ Radio je kao profesor matematike u bogosloviji u Gracu, a kasnije je postao pomoćnik astronoma Tihona Brahea u Pragu.
- ▶ Kepler je živio u vremenu kada je naučni svet bio složen - granica između astronomije i astrologije nije bila jasno povučena, ali je postojala izražena razlika između astronomije i fizike.



Portrait by August Köhler, 1910, after 1627 original

Johan Kepler (1571 - 1630)

- ▶ Kepler je upoznao Tiho Brahea u Benátky nad Jizerou (oko 35 km od Praga), gde je u februaru 1600. godine bila izgrađena Braheova nova opservatorija.
- ▶ Tamo je **analizirao Braheova posmatranja Marsa**.
- ▶ Tokom dva meseca boravio je kao Braheov gost, proučavajući njegove detaljne zapise o kretanju planeta.
- ▶ Brahe je svoje **podatke ljubomorno čuvao**, ali je **bio impresioniran Keplerovim teorijskim sposobnostima** i zato mu je omogućio pristup širem delu svojih posmatranja.
- ▶ Pregovori o formalnom zaposlenju isprva su propali, pa je Kepler nakratko otišao.
- ▶ Kasnije su se pomirili i dogovorili oko plate i uslova života.
- ▶ U junu 1600. Kepler se vratio u Grac da dovede porodicu, a nekoliko meseci kasnije preselio se u Prag.
- ▶ Tokom većeg dela 1601. godine Kepler je bio direktno podržan od strane Brahea, koji mu je **poverio analizu planetarnih posmatranja**.
- ▶ Samo dva dana posle Braheove iznenadne smrti (24. oktobra 1601.), **Kepler je imenovan njegovim naslednikom** na mestu dvorskog matematičara i preuzeo je zadatak da dovrši Braheov nedovršeni rad.
- ▶ Narednih jedanaest godina na toj poziciji predstavljali su najplodniji period njegovog života.

The image shows two pages from Johannes Kepler's 'Rudolphine Tables' (Tabulae Rudolphinae), specifically the section on eclipses. The left page is titled 'TABULAE RUDOLPHINAE ASTRONOMI CARUM PARSTERTIA, DE ECLIPSIBUS SOLIS ET LUNAE, ALIISQUE PLANETARUM CONJUNCTIONIBUS ET CONJUGATIONIBUS'. The right page is titled 'Tabula exhibens portiones ipsam Latitudinis Meridiani'. Both pages contain complex tables of astronomical data, including dates, times, and coordinates for various celestial events. The tables are organized into columns and rows, with headings in Latin. The right page also includes a small diagram of the Earth and Moon's positions during an eclipse.

Two pages from Kepler's Rudolphine Tables showing eclipses of the Sun and Moon (September 1627)

Keplerovi zakoni kretanja planeta

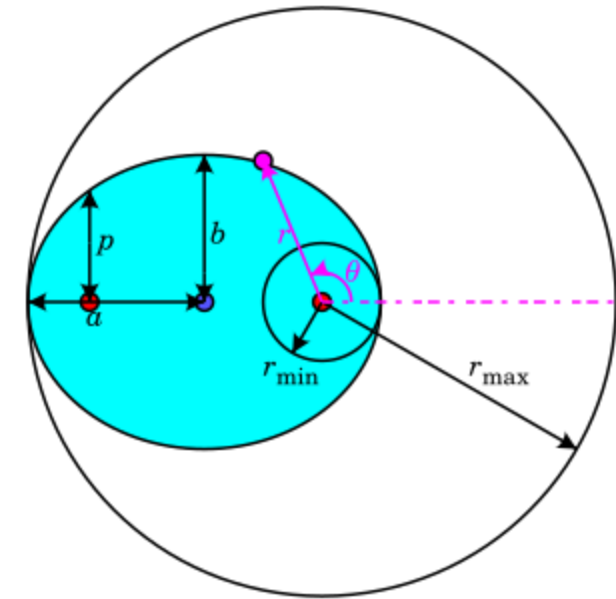
- ▶ Objavljeni između 1609. i 1619. godine, Keplerovi zakoni opisuju putanje planeta oko Sunca.
- ▶ Oni su izmijenili Kopernikovu heliocentričnu teoriju, zamenivši kružne orbite i epicikle sa eliptičnim putanjama, i objasnili kako se brzina kretanja planeta menja duž njihovih orbita.

Copernicus	Kepler's law
Orbite planeta su kružnice sa epiciklima.	Orbite planeta su elipse
Sunce je približno u centru orbita	Sunce je u jednoj od žiža elipse.
Brzina planeta je približno konstantna.	Brzina (tangencijalna i ugaona) nisu konstantne tokom orbite.

1. Keplerov zakon

- ▶ **Orbita svake planete je elipsa, pri čemu se Sunce nalazi u jednoj od dve žiže.**
- ▶ Jednačina elipse $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$; ekscentricitet $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
 - ▶ gde je p orbitalni parametar, ε je ekscentricitet elipse, r je rastojanje od planete do Sunca, i θ je ugao trenutnog položaja planete meren u odnosu na pravac najbližeg položaja planete
 - ▶ Za $\theta = 90^\circ$ i $\theta = 270^\circ$, važi $r = p$.
- ▶ Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina:

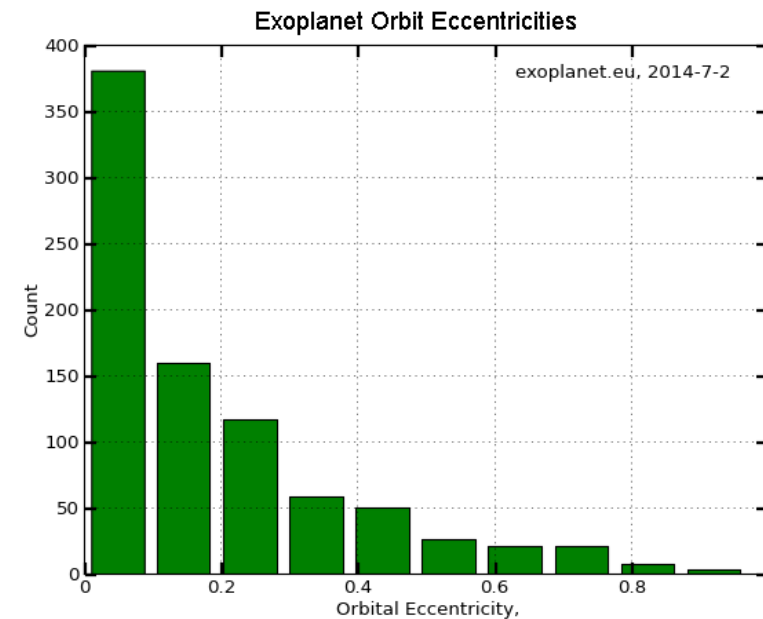
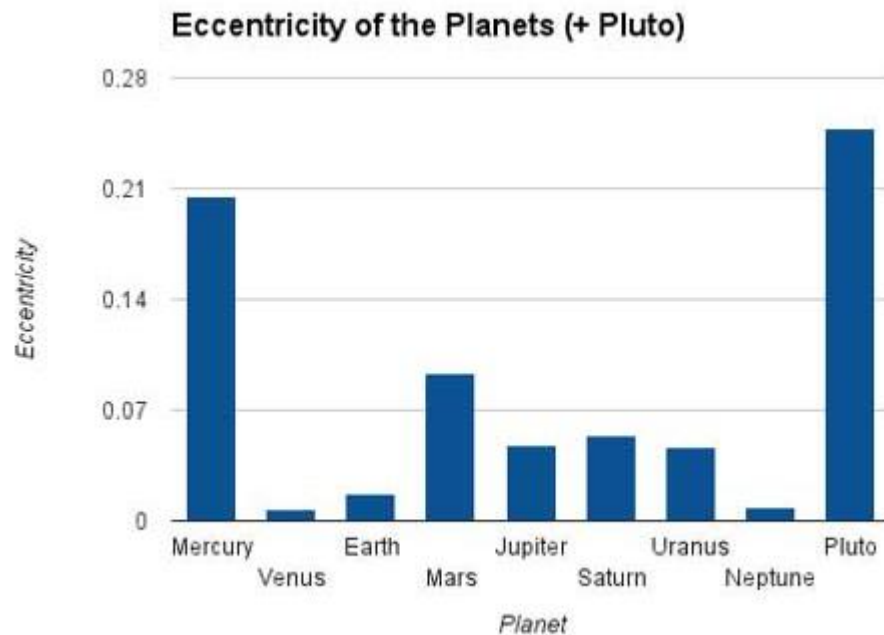
$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$
$$b = \sqrt{r_{\max} \cdot r_{\min}} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$
$$p = \left(\frac{r_{\min}^{-1} + r_{\max}^{-1}}{2} \right)^{-1}$$



Heliocentrični (polarni) koordinatni sistem (r, θ) za elipsu. Na slici: velika polu-osa a , mala polu-osa b i orbitalni parametar (semi-latus rectum) p ; centar elipse i dve žiže obeležene su velikim tačkama. Za $\theta = 0^\circ$, $r = r_{\min}$ i za $\theta = 180^\circ$, $r = r_{\max}$.

1. Keplerov zakon

- ▶ Putanje planeta imaju mali ekscentricitet (nisu mnogo različite od kružnih), osim u slučaju Merkura i „bivše“ planete Pluton.
- ▶ Putanje prirodnih satelita, asteroida i periodičnih kometa takođe su eliptične.

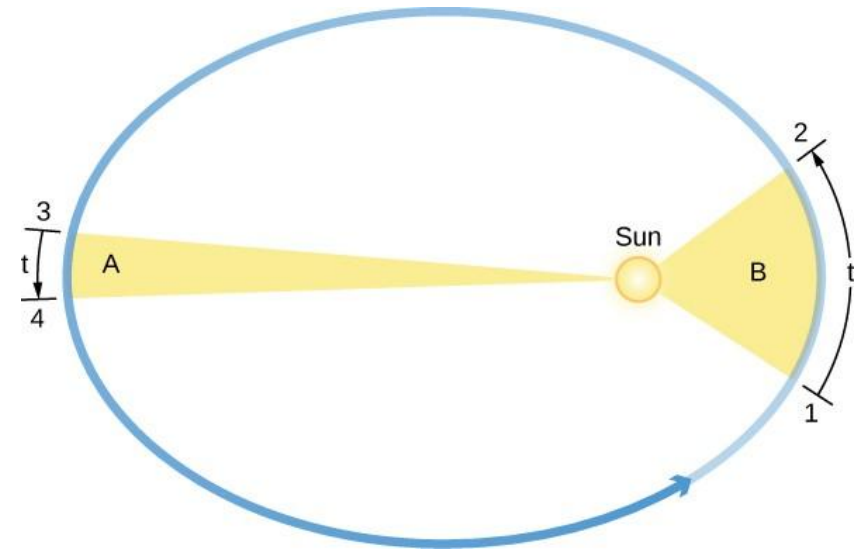
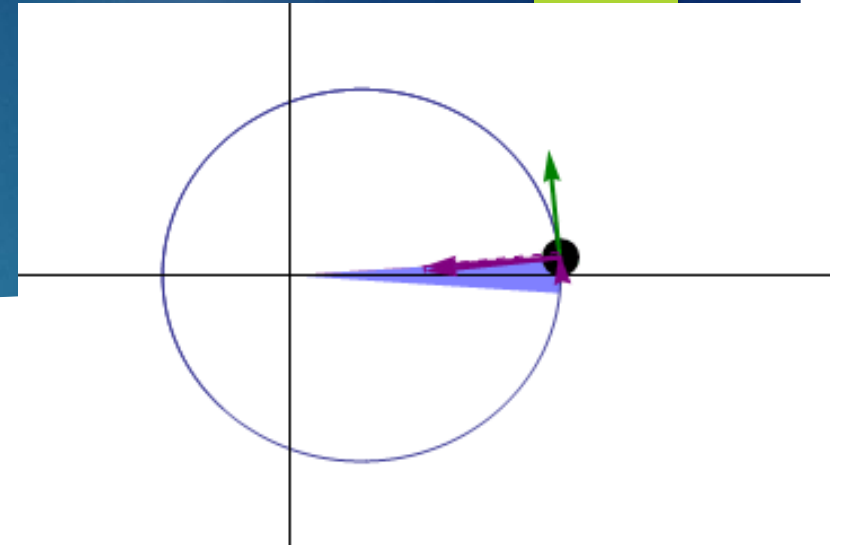


2. Keplerov zakon

- Prava koja spaja planetu i Sunce pokriva jednake površine u jednakim vremenskim intervalima.

$$\begin{aligned}dA &= \frac{1}{2} r \cdot r d\theta \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} && \text{Konstantna arealna (sektorska) brzina} \\ T \cdot \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} &= \pi ab \\ n = \frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{T} &\Rightarrow r^2 d\theta = ab \cdot n dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{abn}{2} = \frac{\pi ab}{n}}$$



3. Keplerov zakon

- Kvadrati perioda (T) obilaska planete oko Sunca srazmerni su kubovima velikih poluosa (a) njihovih putanja

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_3^3}{T_3^2} = \dots = \text{const}$$

- Koristeći **Njutnov zakon gravitacije** (1687), treći Keplerov zakon može se izvesti za slučaj kružne orbite tako što se centripetalna sila izjednači sa gravitacionom silom:

$$\begin{aligned} mr\omega^2 &= G \frac{mM}{r^2} \\ mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 &= G \frac{mM}{r^2} \\ T^2 &= \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 = \text{const} \cdot r^3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(365.25)^2} \approx 7.5 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2} \approx 7.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{AU}^3}{\text{day}^2}$$

3. Keplerov zakon

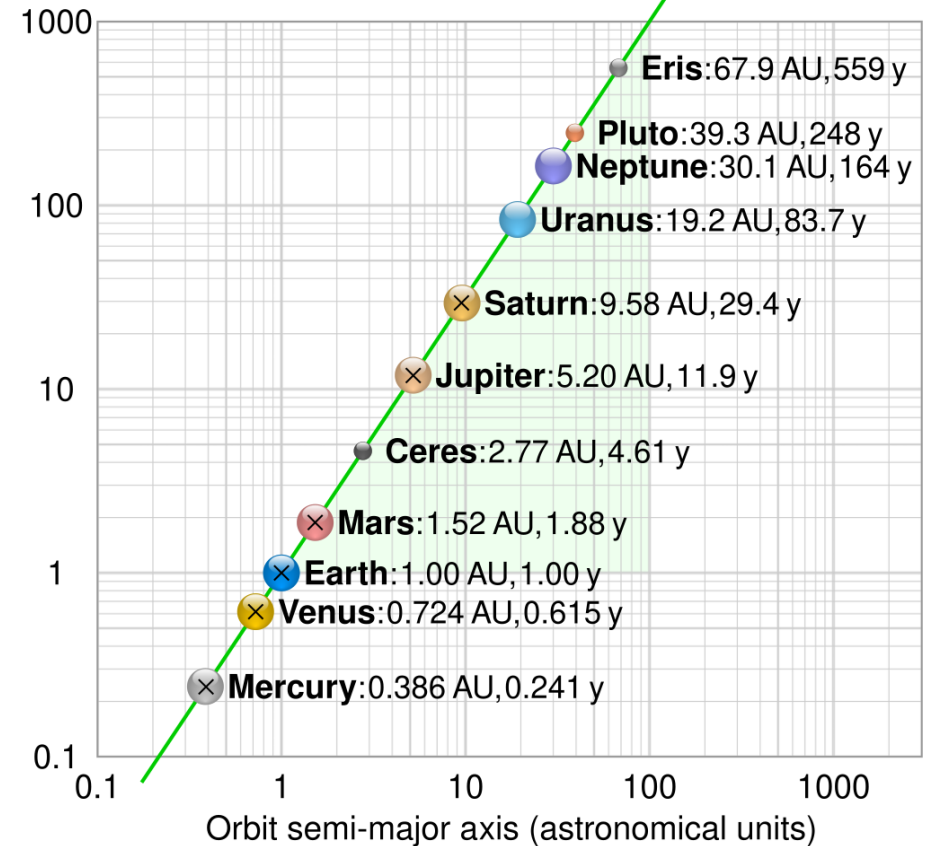
Data used by Kepler (1618)

Planet	Mean distance to sun (AU)	Period (days)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{-6} AU ³ /day ²)
Mercury	0.389	87.77	7.64
Venus	0.724	224.70	7.52
Earth	1	365.25	7.50
Mars	1.524	686.95	7.50
Jupiter	5.2	4332.62	7.49
Saturn	9.510	10759.2	7.43

Modern data (Wolfram Alpha Knowledgebase 2018)

Planet	Semi-major axis (AU)	Period (days)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{-6} AU ³ /day ²)
Mercury	0.38710	87.9693	7.496
Venus	0.72333	224.7008	7.496
Earth	1	365.2564	7.496
Mars	1.52366	686.9796	7.495
Jupiter	5.20336	4332.8201	7.504
Saturn	9.53707	10775.599	7.498
Uranus	19.1913	30687.153	7.506
Neptune	30.0690	60190.03	7.504

Orbital period (Earth years)



Simulacija

<https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws>



keplers-laws_en.html

Položaj planeta (1)

- **Prvi i drugi Keplerov zakon** koriste se za izračunavanje položaja planete u zavisnosti od vremena.

1. Izračunati „**mean motion**“ $n = (2\pi)/T$, gde je T period.
2. Izračunati „**mean anomaly**“ $M = M_0 + n \cdot \Delta t$, i $\Delta t = t - T_0$ gde je t željeno vreme izračunavanja, T_0 je epoha; M_0 je srednje vreme epohe za planetu.
3. Izračunati „**eccentric anomaly**“ E rešavanjem Keplerove jednačine

$$M = E - \epsilon \cdot \sin E,$$

gde je ϵ ekscentricet.

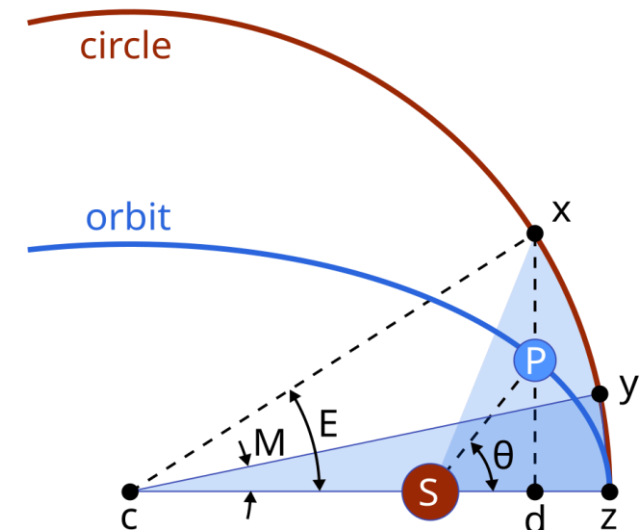
4. Izračunati „**true anomaly**“ θ rešavajući jednačinu:

$$(1 - \epsilon) \tan^2 \frac{\theta}{2} = (1 + \epsilon) \tan^2 \frac{E}{2}$$

5. Izračunati „**heliocentric distance**“ r :

$$r = a(1 - \epsilon \cos E)$$

gde je a velika polu-osa.



Položaj planeta (2)

6. Izračunavanje heliocentričnih koordinata (x', y', z')

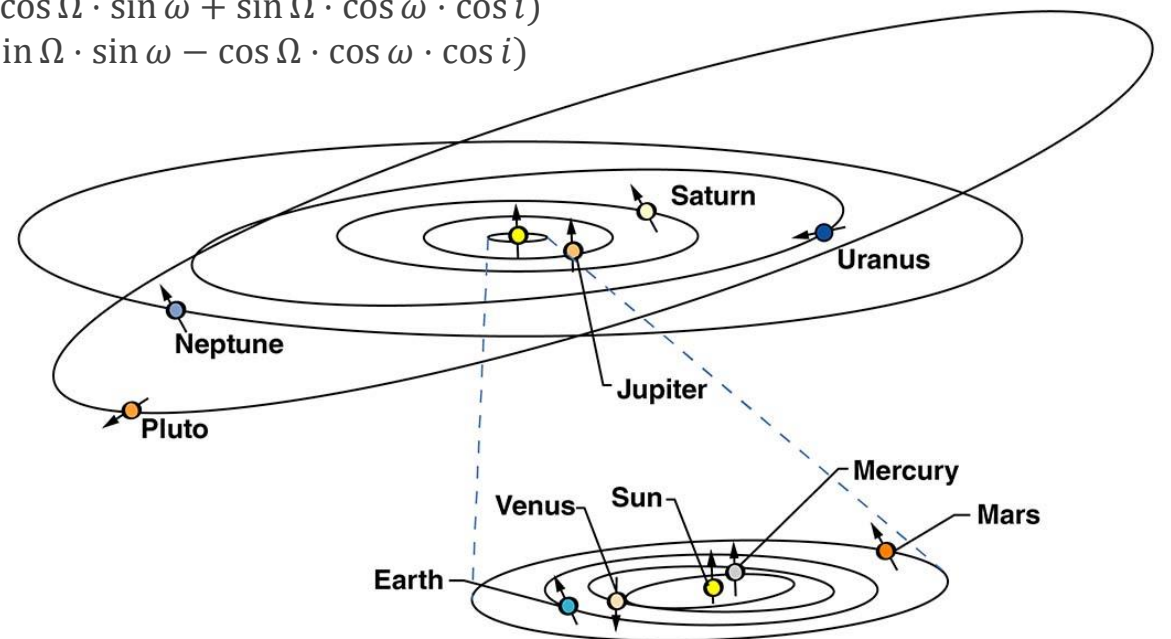
► Koordinate u orbitalnoj ravni su $x' = r \cdot \cos \theta$, $y' = r \cdot \sin \theta$, $z' = 0$

► Konverzija u heliocentrične eliptične koordinate:

$$x = x' \cdot (\cos \Omega \cdot \cos \omega - \sin \Omega \cdot \sin \omega \cdot \cos i) - y' \cdot (\cos \Omega \cdot \sin \omega + \sin \Omega \cdot \cos \omega \cdot \cos i)$$

$$y = x' \cdot (\sin \Omega \cdot \cos \omega \cdot \cos \Omega \cdot \sin \omega \cdot \cos i) + y' \cdot (\sin \Omega \cdot \sin \omega - \cos \Omega \cdot \cos \omega \cdot \cos i)$$

$$z = x' \sin \omega \cdot \sin i + y' \cdot \cos \omega \cdot \sin i$$



Hajde da nađemo Saturn ☺

- ▶ Ponoviti korake 1 - 6 za Zemlju i Saturn!
- ▶ Orbitalni elementi (Epoch J2000.0)

	Earth	Saturn
Semi-major axis (a)	1.00000261 AU	9.53707032 AU
Eccentricity (e)	0.01671123	0.05415060
Inclination (i)	0.00005°	2.485240°
Longitude of Ascending Node (Ω)	348.73936°	113.6624°
Argument of Perihelion (ω)	114.20783°	336.0139°
Mean Anomaly (M_0) at Epoch	357.51716°	320.3462°
Epoch (T_0)	J2000.0	J2000.0
	01.01.2000 @12:00:00	

Položaj planeta (3)

- Želimo da izračunamo položaj Saturna (**right ascension**, α , i **declination**, δ) na nebu

- 7. Izračunati geocentrični položaj Saturna

$$x_{geocentric} = x_{saturn} - x_{earth}$$

$$y_{geocentric} = y_{saturn} - y_{earth}$$

$$z_{geocentric} = z_{saturn} - z_{earth}$$

- 8. Konvertovati u ekvatorijalne koordinate, $\epsilon \approx 23.44^\circ$

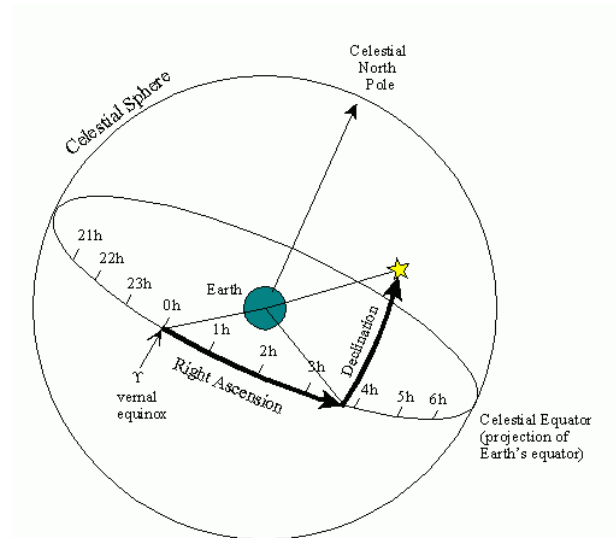
$$x_{equatorial} = x_{geocentric}$$

$$y_{equatorial} = y_{geocentric} \cdot \cos \epsilon - z_{geocentric} \cdot \sin \epsilon$$

$$z_{equatorial} = y_{geocentric} \cdot \sin \epsilon + z_{geocentric} \cdot \cos \epsilon$$

- 9. Izračunati Right Ascension (RA) i Declination (Dec):

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{x_{equatorial}}{y_{equatorial}} \quad \delta = \sin^{-1} \frac{z_{equatorial}}{\sqrt{x_{equatorial}^2 + y_{equatorial}^2 + z_{equatorial}^2}}$$



Saturn, 27.08.2024 @23:00

- ▶ RA (hours): 23.23
- ▶ Dec (degrees): -7.33
- ▶ Alt. (degrees): 24.29
- ▶ Az. (degrees): 124.86



Saturn, 27.08.2024 @23:00

- ▶ RA (hours): 23.23
- ▶ Dec (degrees): -7.33
- ▶ Alt. (degrees): 24.29
- ▶ Az. (degrees): 124.86

The screenshot displays a stargazing application interface. The central part of the screen shows a simulated telescope view of the night sky. A large, bright yellowish-white planet, Saturn, is visible on the right side of the field of view, with its rings clearly visible. To its right, a smaller, fainter object is labeled "(SVIII) Ia₁". A crosshair is centered in the field of view. The background is dark with several other stars visible.

On the right side of the screen, there is a panel with telescope and eyepiece information:

- Ocular #1: Plossl 26mm (52deg)
Ocular FL: 26.0 mm
Ocular aFOV: 52.00°
- Telescope #22: Skywatcher 200/1000
Magnification: 38.5x (0.19D)
Exit pupil: 5.20 mm
FOV: 1.3520°
- Lens: None
Multiplicity: N/A

At the bottom left, there is a "Search window" panel with the following information:

- Object: SIMBAD
- Position: Lists
- Options: Options
- Coordinate system: Horizontal
- Azimuth: +124.86098°
- Altitude: +24.29131°

A note below the search window states: "Note: this tool doesn't apply the refraction correction for coordinates."

At the bottom right, there is a status bar with the following information:

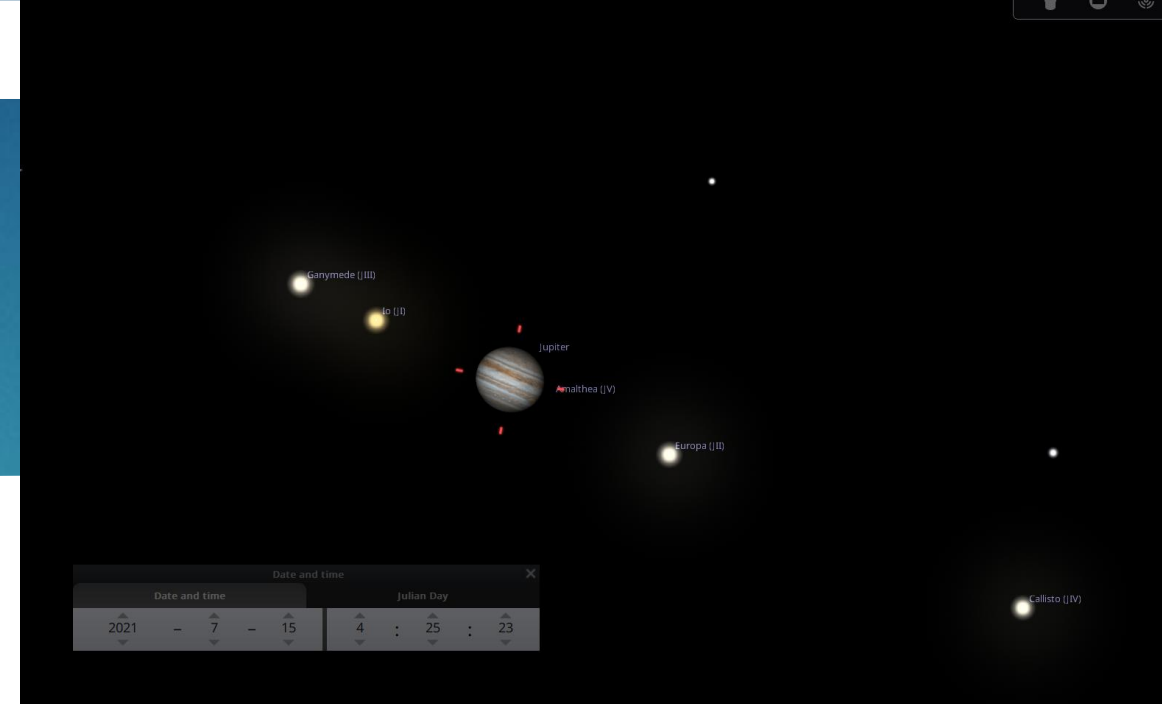
- Earth: 2.6°
- 25.2 FPS
- 2024-08-27 23:00:00 UTC+03:00

Masa Jupitera

- ▶ Ne možemo direktno izmeriti sve u svemiru - mase i udaljenosti planeta i njihovih meseca.
- ▶ Međutim, iz njihovih kretanja možemo izvesti i zaključiti mnoge osobine nebeskih tela, iako ih ne možemo neposredno izmeriti.
- ▶ Treći Keplerov zakon: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$

$$M = \frac{a^3}{T^2}$$

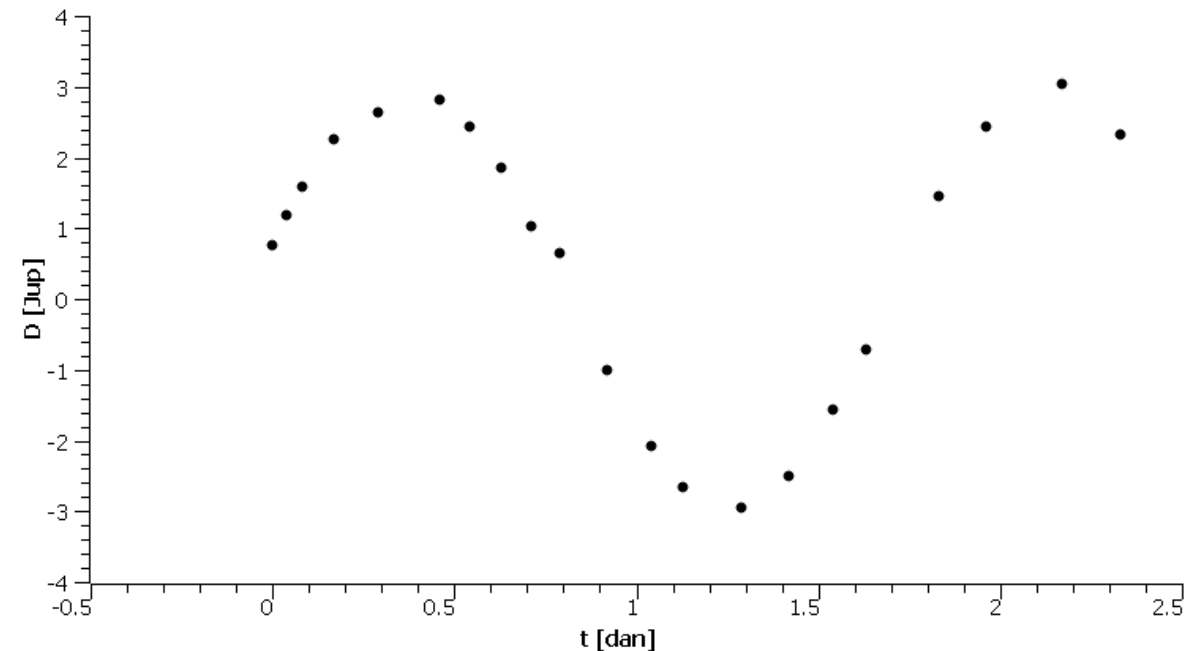
- ▶ M – masa centralnog tela (u $M_{\odot}$),
- ▶ a – velika polu-osa (u AU),
- ▶ T – period (u godinama)



„Posmatranje“ (Stellarium)

time	ΔT	sig	min	sec	Jupiter	D [Jup]	D [AU]
2459409.565	0.00	1	0	35.41	46.51	0.7613	1.63E-05
2459409.607	0.04	1	0	55.26	46.51	1.1881	2.55E-05
2459409.649	0.08	1	1	13.87	46.51	1.5883	3.41E-05
2459409.732	0.17	1	1	44.86	46.51	2.2546	4.84E-05
2459409.857	0.29	1	2	2.12	46.51	2.6257	5.63E-05
2459410.024	0.46	1	2	11.16	46.51	2.8200	6.05E-05
2459410.107	0.54	1	1	53.27	46.51	2.4354	5.23E-05
2459410.191	0.63	1	1	26.67	46.51	1.8635	4.00E-05
2459410.274	0.71	1	0	47.87	46.51	1.0292	2.21E-05
2459410.357	0.79	1	0	30.00	46.51	0.6450	1.38E-05
2459410.482	0.92	-1	0	47.08	46.51	-1.0123	-2.17E-05
2459410.607	1.04	-1	1	36.94	46.51	-2.0843	-4.47E-05
2459410.691	1.13	-1	2	3.28	46.51	-2.6506	-5.69E-05
2459410.857	1.29	-1	2	16.76	46.51	-2.9404	-6.31E-05
2459410.982	1.42	-1	1	56.61	46.51	-2.5072	-5.38E-05
2459411.107	1.54	-1	1	12.66	46.51	-1.5622	-3.35E-05
2459411.191	1.63	-1	0	33.35	46.51	-0.7171	-1.54E-05
2459411.399	1.83	1	1	7.69	46.51	1.4554	3.12E-05
2459411.524	1.96	1	1	53.30	46.51	2.4360	5.23E-05
2459411.732	2.17	1	2	21.25	46.51	3.0370	6.52E-05
2459411.899	2.33	1	1	48.32	46.51	2.3290	5.00E-05

Jupiter [km]	139,820
AU [km]	149,597,871
Jupiter [AU]	46,606.67



Posmatranje (rezultati)

$$y = a \cos(\omega (t - c)) + b$$

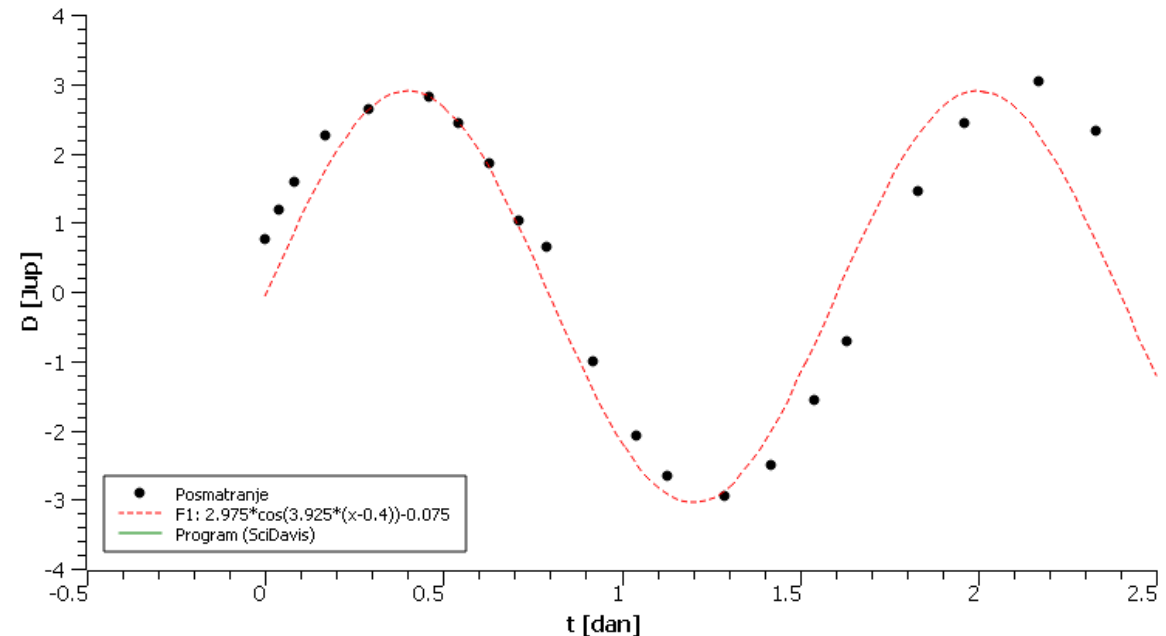
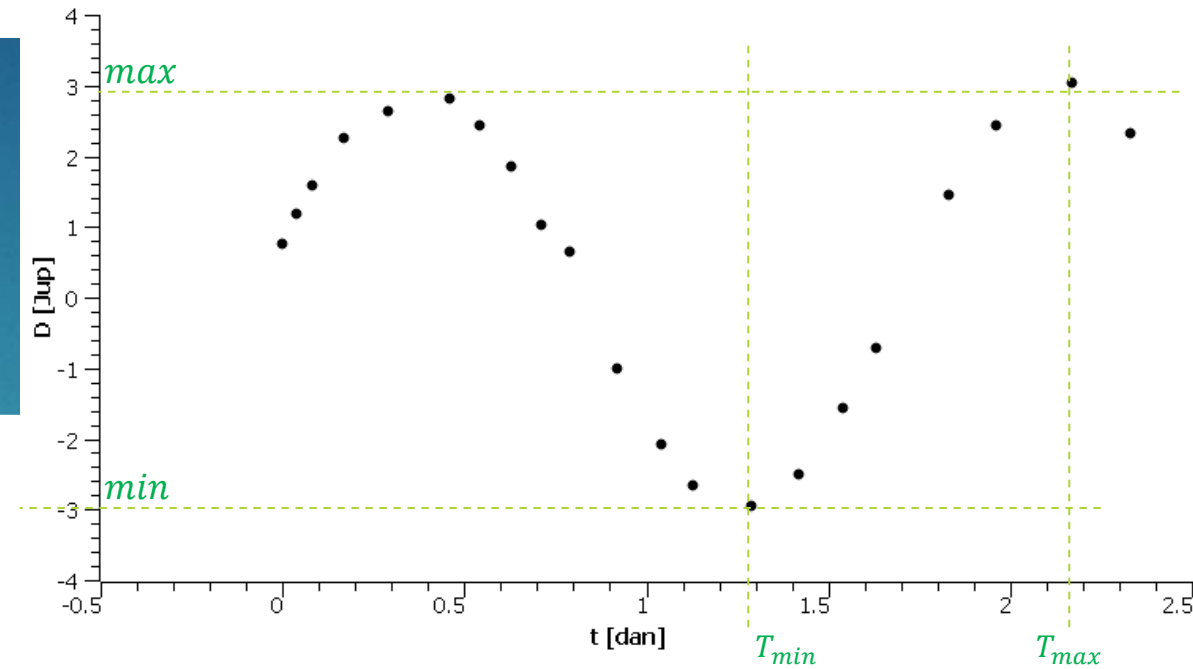
$$b = \frac{\max + \min}{2} = \frac{1}{2}(2.9 + (-3.05)) = \frac{-0.15}{2} = -0.075$$

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{1}{2}(2.9 - (-3.05)) = \frac{5.95}{2} = 2.975$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2(T_{\max} - T_{\min}) = 2(2.1 - 1.3) = 2 \cdot 0.8 = 1.6$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3.925$$

$$c = 0.4$$



Bolji način (SciDavis)

Function: user1 (x, a, b, c, w)

$a * \cos(w * (x - c)) + b$

Parameter	Value	Constant
a	-2.955786850733	☐
b	0.0408699848125348	☐
c	1.25869498609216	☐
w	-3.55636264712317	☐

Initial guesses

Algorithm: Scaled Levenberg-Marquardt

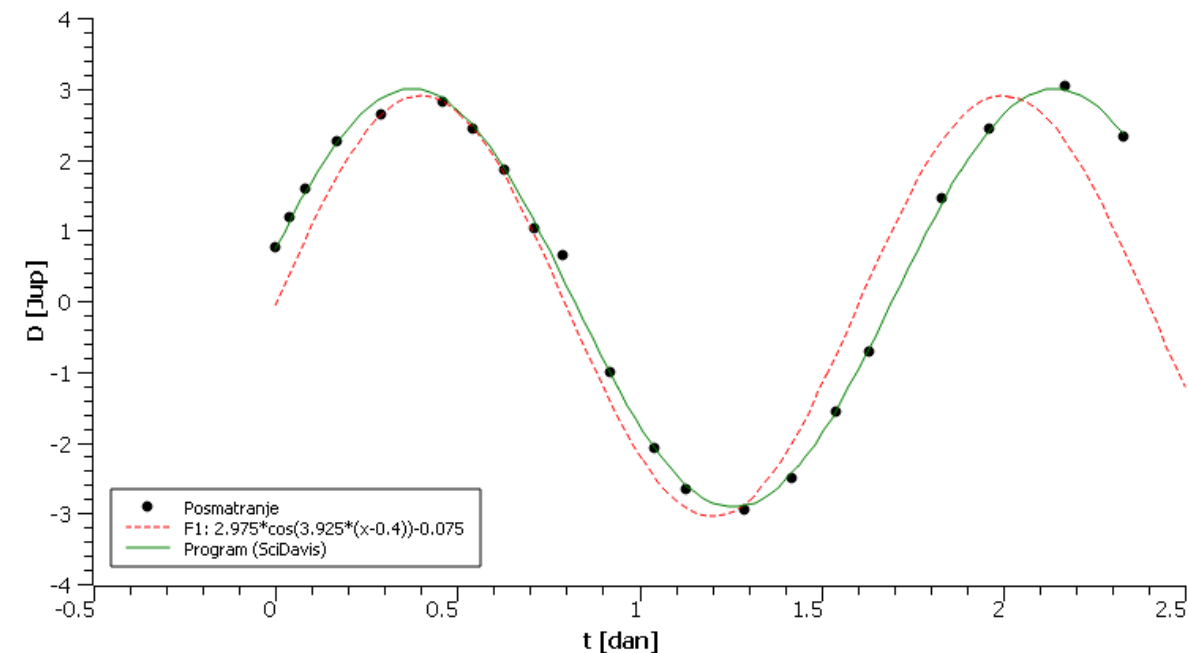
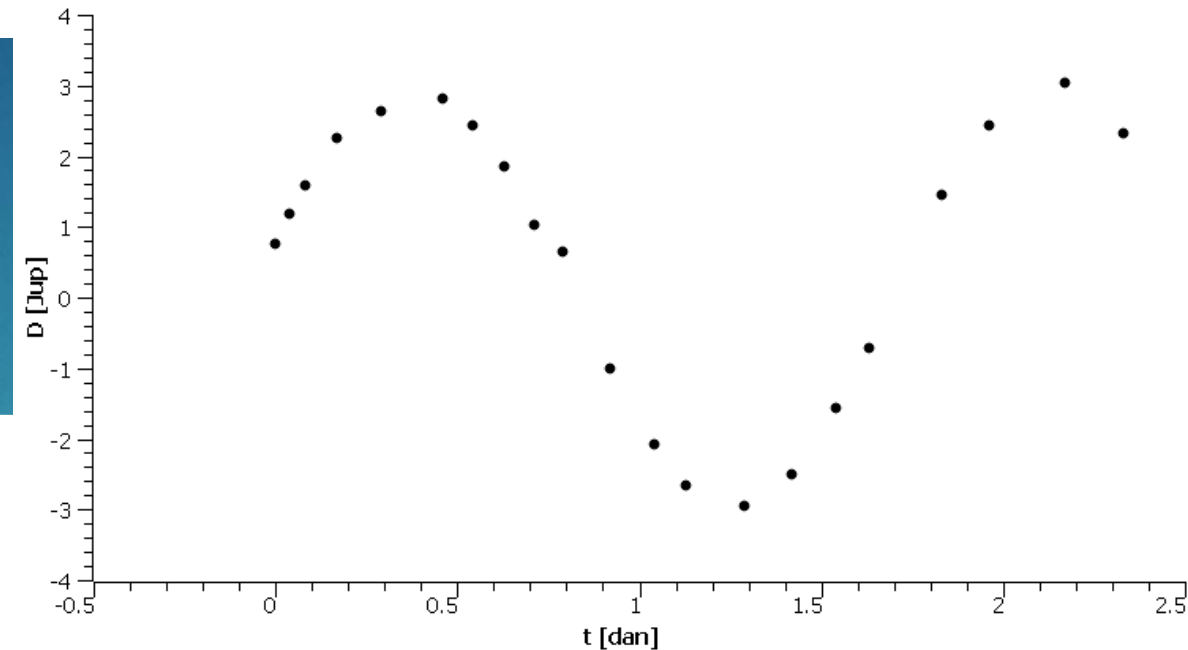
Color:  

From x= 0 To x= 2.33

Iterations: 1000 Tolerance: 1e-4

<https://scidavis.sourceforge.net/>

$$b = -0.075, a = 2.975, \omega = 3.925, c = 0.4$$



Hajde da uporedimo...

► „Papir i olovka“

► $a = 2.956 \text{ [Jup]} = 0.00276 \text{ AU}$

► $T = 1.6 \text{ dana} = 0.0044 \text{ godina}$ $\Delta = 4.29 \%$

► $M = 0.0009134 M_{\odot}$

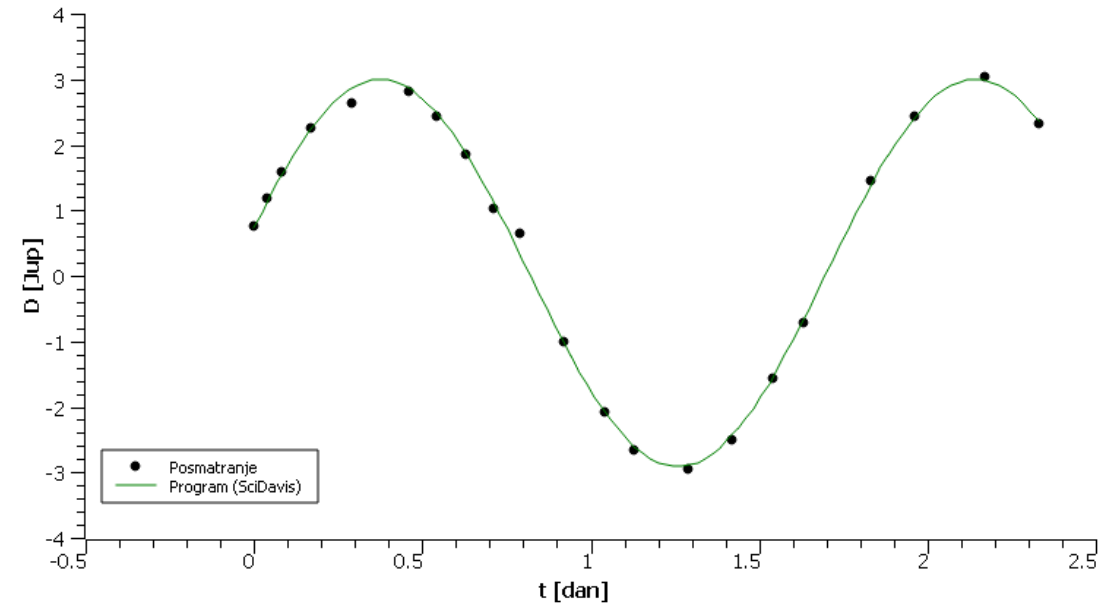
$$M = \frac{a^3}{T^2}$$

► „Naučni“ metod

► $a = 2.975 \text{ [Jup]} = 0.00278 \text{ AU}$

► $T = 1.766 \text{ day} = 0.0048 \text{ year}$ $\Delta = 2.43 \%$

► $M = 0.0009311 M_{\odot}$



$$M = 0.0009543 M_{\odot}$$

„Kepler“ - svemirski teleskop

- ▶ **Keplerov svemirski teleskop** - svemirska opservatorija koju je NASA lansirala 2009. godine.
- ▶ Njegova **misija** bila je da **otkrije planete slične Zemlji**, posebno da istraži deo naše galaksije - Mlečnog puta - u potrazi za potencijalno naseljivim egzoplanetama.
- ▶ Glavni cilj Keplera bio je da pronade **planete veličine Zemlje i manje**, koje se nalaze u „nastanjivoj zoni“, gde bi tečna voda mogla da postoji na površini.
- ▶ Kepler je koristio **metodu tranzita** za otkrivanje egzoplaneta – posmatrao je blago zatamnjenje zvezde kada planeta prođe ispred nje, zaklanjajući deo njenog svetla.
- ▶ Tokom misije, Kepler je **otkrio 2773 potvrđene egzoplanete** i 1982 dodatna kandidata.
- ▶ Misija je **zvanično završena 2018. godine**, kada je teleskop ostao bez goriva. Postavljen je u sigurnu orbitu daleko od Zemlje, dok naučnici i dalje analiziraju njegove podatke.
- ▶ Kepler je **dramatično proširio katalog poznatih egzoplaneta** i pokazao da su planete u našoj galaksiji česte, a mnoge od njih mogu biti potencijalno naseljive.

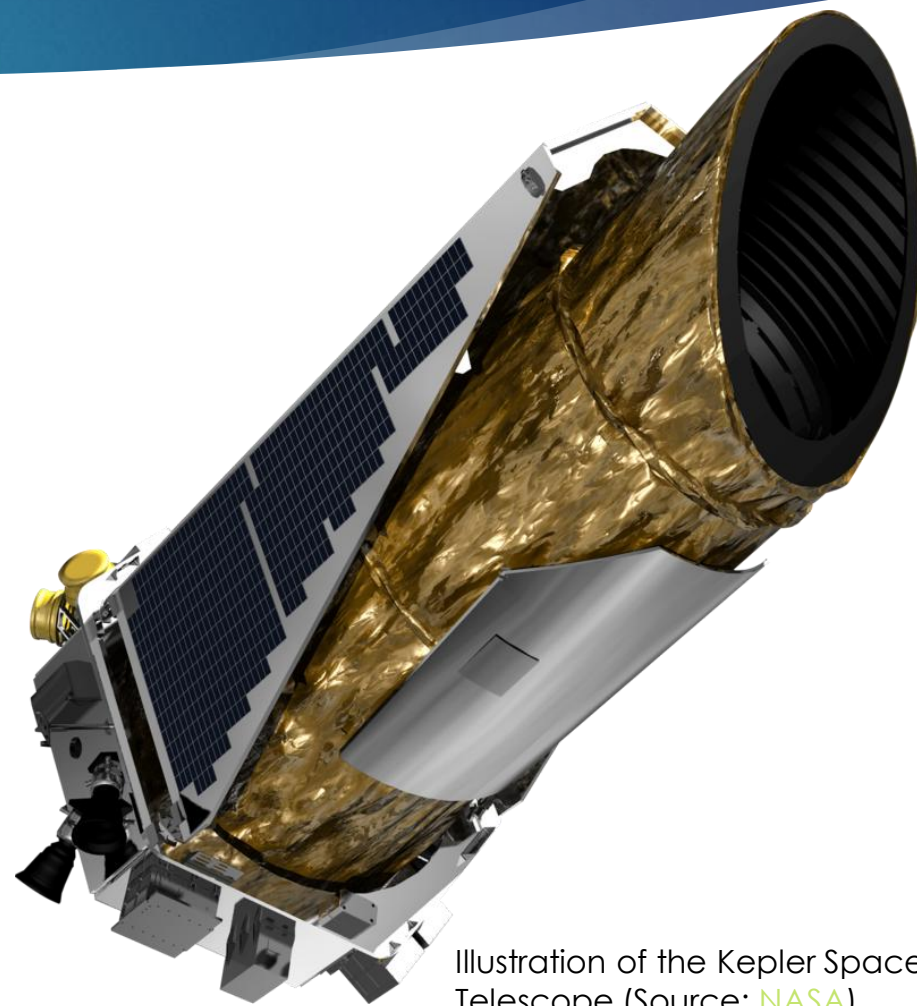
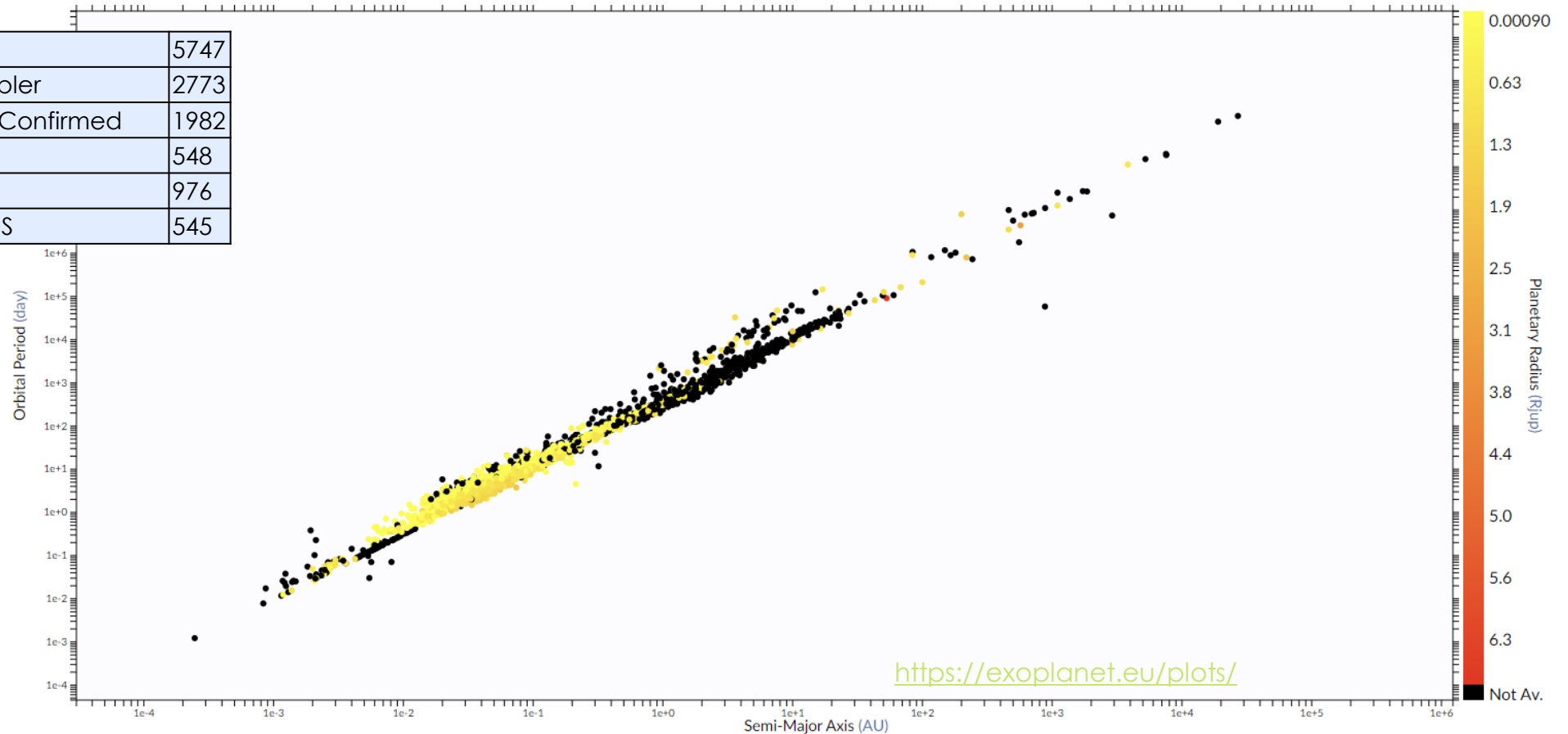


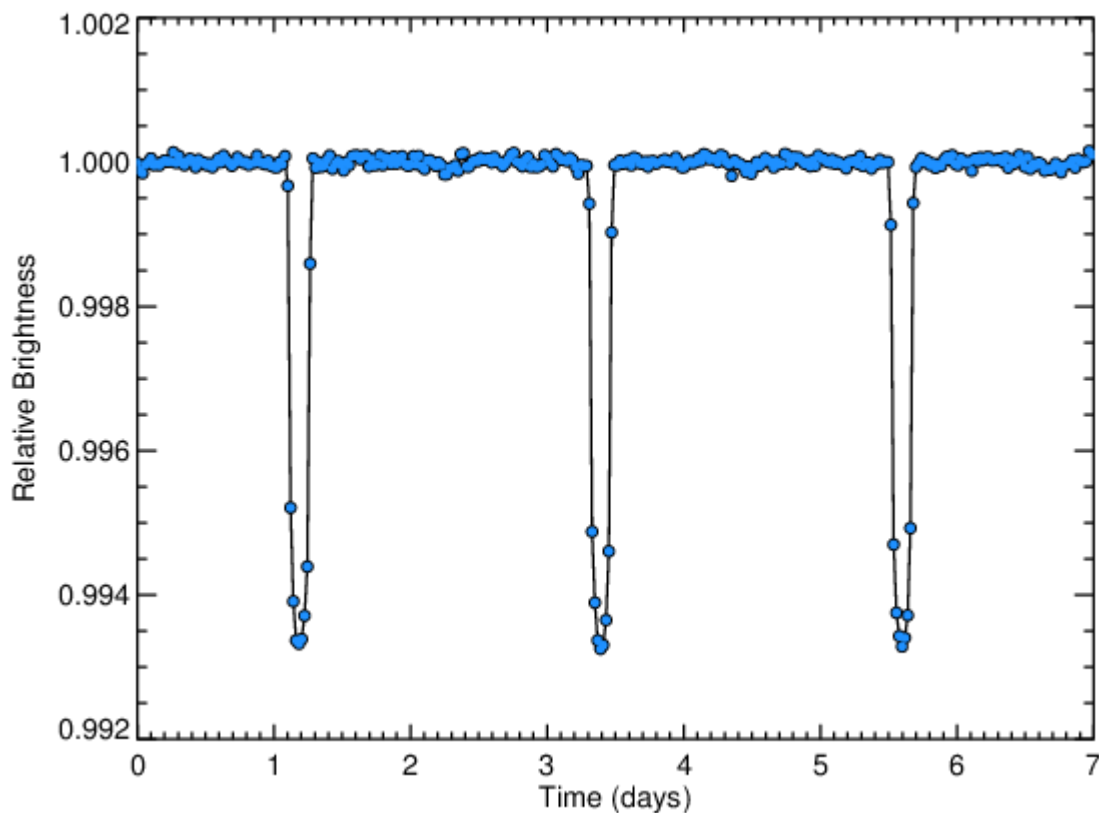
Illustration of the Kepler Space Telescope (Source: [NASA](#))

„Kepler“ vs Třetí Keplerov zákon

All Exoplanets	5747
Confirmed Planets Discovered by Kepler	2773
Kepler Project Candidates Yet To Be Confirmed	1982
Confirmed Planets Discovered by K2	548
K2 Candidates Yet To Be Confirmed	976
Confirmed Planets Discovered by TESS	545



Detekcija ekstrasolarnih planeta



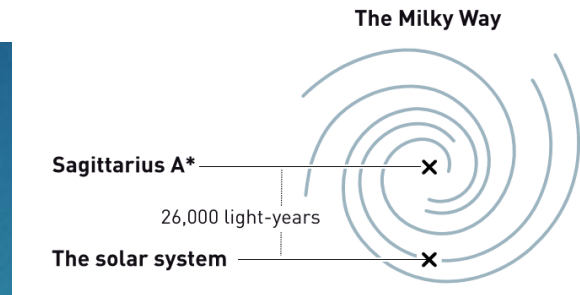
Kriva sjaja HAT-P-7 b, [source](#)

Main sequence stars (V)

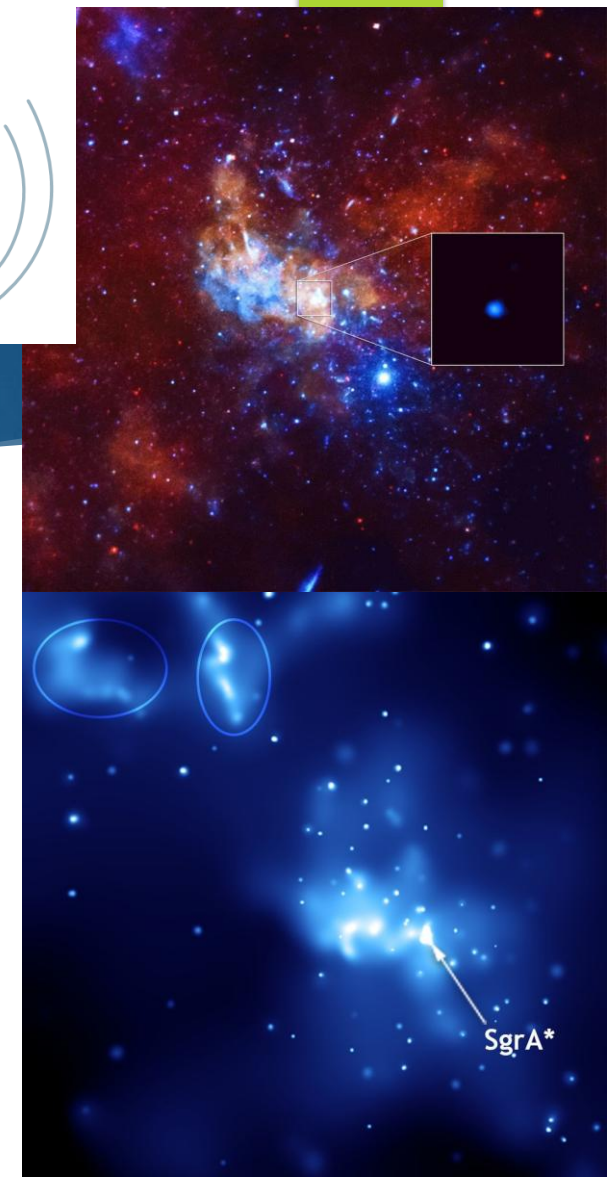
Spectral Type	Temperature (K)	Absolute Magnitude	Luminosity (in solar luminosities)	Mass (in solar masses)
O5	54,000	-10.0	846,000	30.3
O6	45,000	-8.8	275,000	22.9
O7	43,300	-8.6	220,000	21.7
O8	40,600	-8.2	150,000	19.7
O9	37,800	-7.7	95,000	17.6
B0	29,200	-6.0	20,000	12.0
B1	23,000	-4.4	4600	8.24
B2	21,000	-3.8	2600	7.14
B3	17,600	-2.6	900	5.48
B5	15,000	-1.6	260	4.26

$$M = \frac{a^3}{T^2}$$

„Naša“ SMBH, *Sagittarius A**

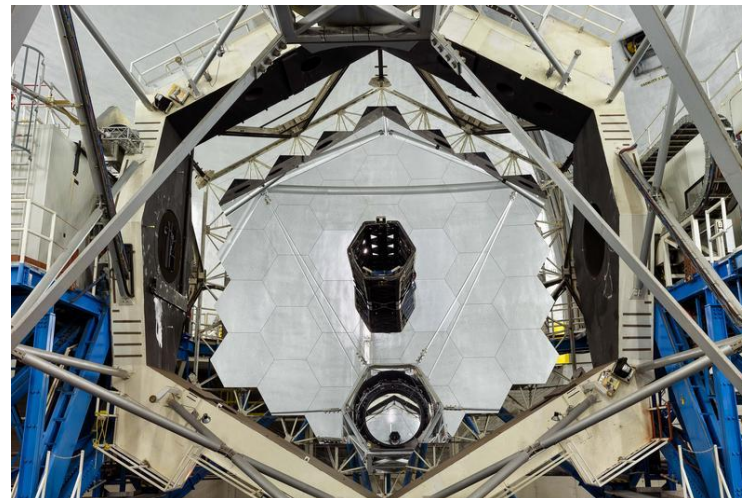


- ▶ **Snažan i kompaktan radio-izvor u centru naše galaksije** nalazi se na granici sazvežđa Strelca (Sagittarius) i Škorpije (Scorpius).
- ▶ Od otkrića **kvazara**, pojavila se **hipoteza o postojanju supermasivne crne rupe (SMBH)** u središtima velikih galaksija - objekta čija se masa kreće **od nekoliko miliona do nekoliko milijardi masa Sunca**.
- ▶ Još pre oko 100 godina, **Harlow Šepli** (Harlow Shapley) ukazao je na **galaktički centar**, koji je kasnije identifikovan kao **Sagittarius A*** - snažan radio-izvor u samom srcu Mlečnog puta.
- ▶ Tokom **1990-ih i kasnije**, istraživački timovi Reinharda Genzela i Andree Ghez pažljivo su posmatrali putanje zvezda u blizini centra galaksije, čime su pružili direktne dokaze o postojanju supermasivne crne rupe u središtu Mlečnog puta.



Teleskopi

- ▶ R. Genzel i grupa
 - ▶ New Technology Telescope (La Silla mountain, Chile)
 - ▶ Very Large Telescope facility, VLT (Chile) 4 teleskopa, najveći je 8 meters (2 puta veći od NTT)
- ▶ A. Ghez i grupa
 - ▶ Keck Observatory (Hawaii)
 - ▶ Oko 10 meters (36 heksagonalnih segmenata)

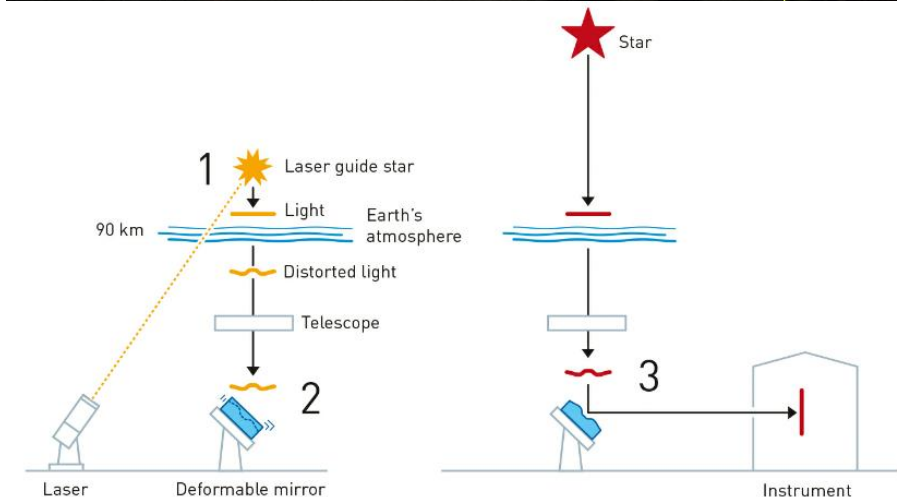


Images:

1. ESO/G. Hüpdepohl (atacamaphoto.com)
2. Andrew Richard Hara/W. M. Keck Observatory [[link](#)]
3. [Keck Observatory](#)

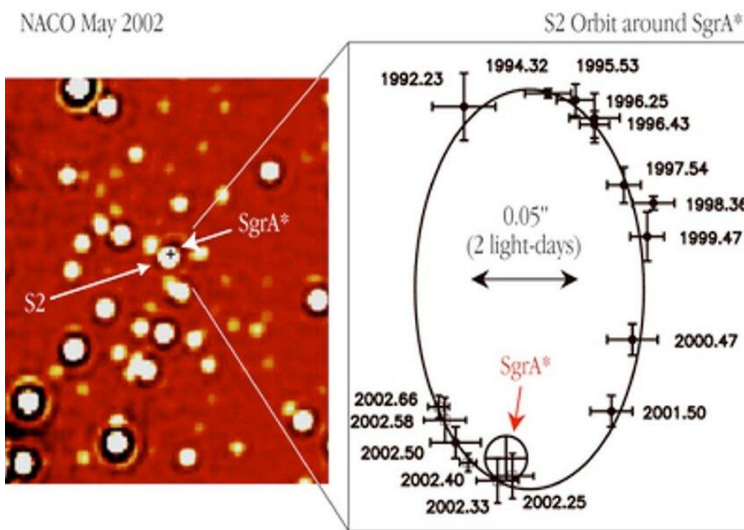
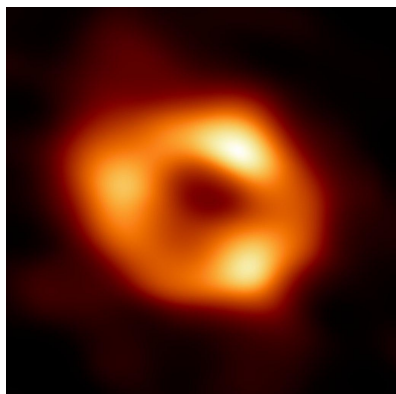
Zvezde pričaju priču

- ▶ Ogromni teleskopi, ali postoji problem - atmosfera
 - ▶ Adaptivna optika
- ▶ Istraživači pratili oko 30 sjajnih zvezda
 - ▶ 1 svetlosni mesec od centra
 - ▶ Velike brzine zvezda
 - ▶ Veće rastojanje – stabilnije i „standardnije“ orbite
- ▶ **Zvezda S2**
 - ▶ Period 16 godina – mapirana cela orbita!
 - ▶ (Sunce: 200 miliona godina)



Zvezde pričaju priču

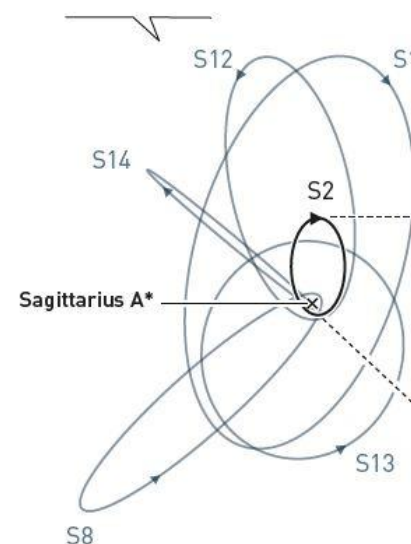
- ▶ Odlično slaganje rezultata koje su dobili timovi
 - ▶ SMBH sa masom o oko 4 miliona masa Sunca
 - ▶ Površina kao Sunčev sistem
- ▶ Možda je uskoro vidimo...
 - ▶ Videli smo je 😊



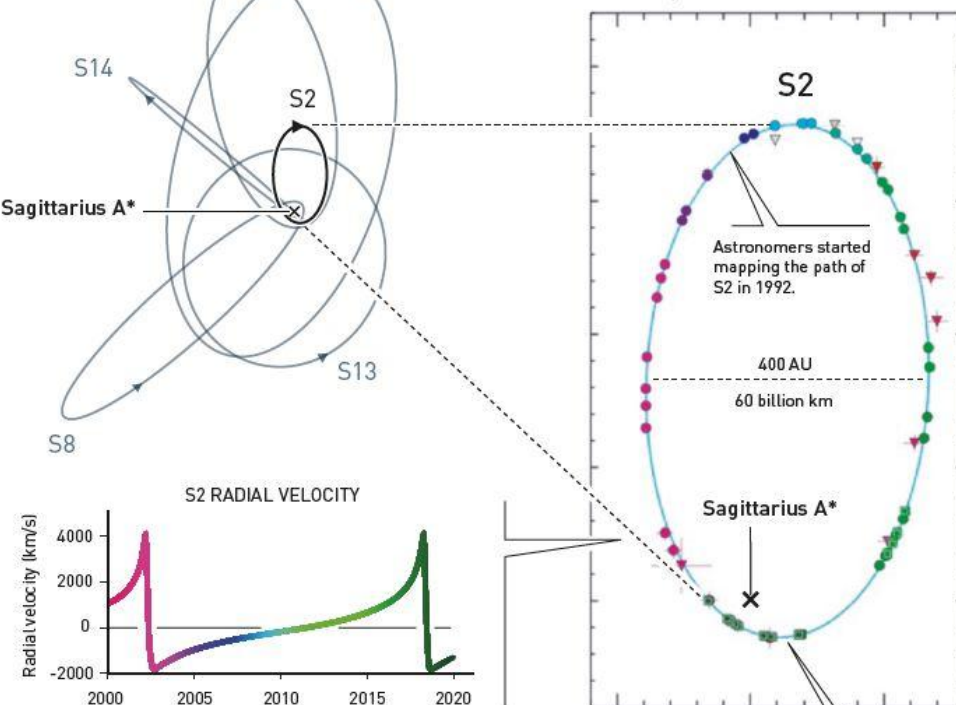
Stars closest to the centre of the Milky Way

The stars' orbits are the most convincing evidence yet that a supermassive black hole is hiding in Sagittarius A*. This black hole is estimated to weigh about 4 million solar masses, squeezed into a region no bigger than our solar system.

Some of the measured orbits of stars close to Sagittarius A* at the centre of the Milky Way.



Astronomers were able to map an entire orbit of less than 16 years for one of the stars, S2 (or S-02). The closest it came to Sagittarius A* was about 17 light hours (more than 10,000 million kilometres).



The S2 star's radial velocity increases as it approaches Sagittarius A* and decreases as it moves away along its elliptical orbit. Radial velocity is the component of the star's velocity that is in our line of sight.

Closest to Sagittarius A* (in 2002 and 2018), S2 reaches its maximum velocity of 7 000 km/s.

 OTHERS ▾
 HELP ?

Catalog








[→ Cite/acknowledge VizieR catalogue](#)
[→ Rules of usage of VizieR data](#)
[Contact](#) - [Legal](#)

[Show constraint information](#)

[JApJ707.L114/table1](#)
[The orbit of S2 star around Sgr A* \(Gillessen+, 2009\)](#)
[ReadMe+ftp](#)
[Post annotation](#)
 Orbital data for S2 used in this work ([RA](#), [velocity](#) [timeSeries](#) [2009Apr..707L.114G](#)
 and [RA](#), [astrometry](#)) (96 rows)



plot the output

query using TAP.SOL

Full

Ep.A

oRA

e_{mas}

oDE

e_{mas}

Tel.A

Ep.Y

VLSR

e_{mas}

Tel.V

yr

mas

mas

mas

mas

yr

km/s

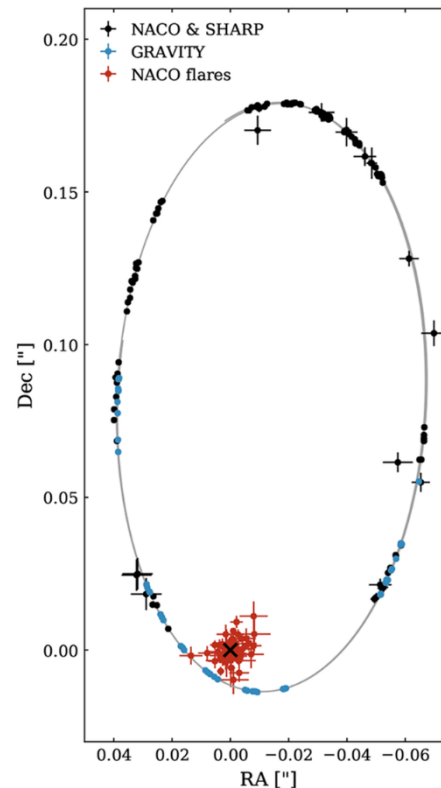
km/s

1	1992.294	-6.4	6.6	172.0	4.7	NTT	2000.487	1199	100	Keck
2	1992.314	-28.5	4.8	179.0	3.4	NTT	2002.418	-495	40	Keck
3	1995.534	-37.3	3.8	172.1	4.3	NTT	2002.421	-530	45	Keck
4	1996.253	-43.4	3.6	164.4	3.6	NTT	2003.438	-1550	22	Keck
5	1996.427	-45.9	1.9	161.5	5.3	NTT	2004.474	-1143	57	Keck
6	1997.544	-59.0	3.4	130.4	2.8	NTT	2005.410	-926	16	Keck
7	1998.373	-65.3	4.7	122.1	3.5	NTT	2005.504	-850	31	Keck
8	1999.465	-67.5	4.4	106.0	4.1	NTT	2006.391	-692	21	Keck
9	2000.472	-55.3	5.0	63.9	3.1	NTT	2006.461	-718	17	Keck
10	2000.523	-62.8	3.1	57.6	3.1	GEMINI	2006.495	-695	36	Keck
11	2001.502	-49.3	3.8	23.8	2.1	NTT	2006.497	-713	26	Keck
12	2002.488	-27.8	11.5	14.9	10.4	NTT	2007.385	-483	50	Keck
13	2002.250	-3.1	4.0	-6.6	4.0	VLT	2007.548	-506	50	Keck
14	2002.335	6.6	2.7	-7.6	2.7	VLT	2003.353	-1512	49	VLT
15	2002.393	16.3	3.8	0.0	3.8	VLT	2003.446	-1428	63	VLT
16	2002.409	18.2	3.3	2.1	3.3	VLT	2003.271	-1571	52	VLT
17	2002.412	17.3	3.3	2.3	3.3	VLT	2004.535	-1055	41	VLT
18	2002.414	17.4	3.3	3.2	3.3	VLT	2004.537	-1056	33	VLT
19	2002.578	30.8	3.3	20.7	3.3	VLT	2004.632	-1039	34	VLT
20	2002.660	34.1	3.2	26.9	3.2	VLT	2005.158	-1001	68	VLT
21	2002.660	33.7	3.2	27.3	3.2	VLT	2005.212	-960	33	VLT
22	2003.214	41.1	0.3	66.6	0.4	VLT	2005.215	-919	48	VLT
23	2003.351	41.4	0.3	75.0	0.3	VLT	2005.455	-839	53	VLT
24	2003.356	40.7	0.4	74.8	0.4	VLT	2005.461	-907	38	VLT
25	2003.446	40.6	0.5	79.8	0.5	VLT	2005.677	-774	68	VLT
26	2003.451	41.3	0.4	80.4	0.3	VLT	2005.769	-860	51	VLT
27	2003.452	41.5	0.3	80.5	0.3	VLT	2006.204	-702	37	VLT

<https://vizier.cds.unistra.fr/viz-bin/VizieR>

Vežba – izračunajte masu SMBH

- ▶ Desno – koordinate položaja zvezde S2
- ▶ Koordinatni početak – centar SMBH
- ▶ Kako?
 - ▶ Nacrtati tačke (i greške)
 - ▶ Nacrtati elipsu najpribližniju merenjima
 - ▶ Izmeriti veliku poluosu elipse
 - ▶ Arcsec prevesti u svetlosne dane (ld),
 $2 \text{ arcsec} = 28 ld$
 - ▶ Izračunati srednju vrednost ☺



Date (year)	x (arcsec)	dx (arcsec)	y (arcsec)	dy (arcsec)
1992.226	0.104	0.003	-0.166	0.004
1994.321	0.097	0.003	-0.189	0.004
1995.531	0.087	0.002	-0.192	0.003
1996.256	0.075	0.007	-0.197	0.010
1996.428	0.077	0.002	-0.193	0.003
1997.543	0.052	0.004	-0.183	0.006
1998.365	0.036	0.001	-0.167	0.002
1999.465	0.022	0.004	-0.156	0.006
2000.474	-0.000	0.002	-0.103	0.003
2000.523	-0.013	0.003	-0.113	0.004
2001.502	-0.026	0.002	-0.068	0.003
2002.252	-0.013	0.005	0.003	0.007
2002.334	-0.007	0.003	0.016	0.004
2002.408	0.009	0.003	0.023	0.005
2002.575	0.032	0.002	0.016	0.003
2002.650	0.037	0.002	0.009	0.003
2003.214	0.072	0.001	-0.024	0.002
2003.353	0.077	0.002	-0.030	0.002
2003.454	0.081	0.002	-0.036	0.002

Vežba – izračunajte masu SMBH

► ...

► Odrediti period (P)

► $A_{ell} = ab \cdot \pi$ - a i b sa slike, prethodni slajd

► $\Delta A = \frac{\Delta t}{P} \cdot A_{ell}$ - II Keplerov zakon

► Nepoznato ΔA , Δt , A_{ell}

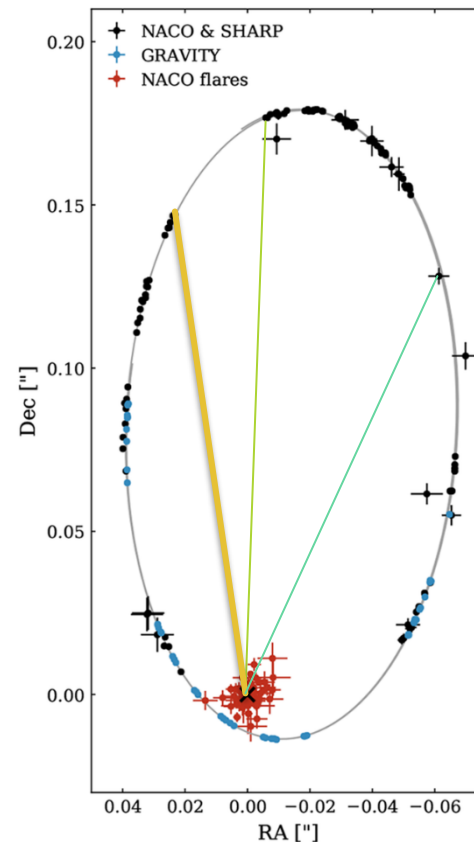
► ΔA i Δt – sa slike (prethodni slajd, za svaki segment)

► Nacrtati trougao i odrediti njegovu površinu (ponoviti više puta!)

► Izračunati masu SMBH

► III Keplerov zakon

► $P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m_{S2})} a^3$, $M \gg m_{S2}$



Date (year)	x (arcsec)	dx (arcsec)	y (arcsec)	dy (arcsec)
1992.226	0.104	0.003	-0.166	0.004
1994.321	0.097	0.003	-0.189	0.004
1995.531	0.087	0.002	-0.192	0.003
1996.256	0.075	0.007	-0.197	0.010
1996.428	0.077	0.002	-0.193	0.003
1997.543	0.052	0.004	-0.183	0.006
1998.365	0.036	0.001	-0.167	0.002
1999.465	0.022	0.004	-0.156	0.006
2000.474	-0.000	0.002	-0.103	0.003
2000.523	-0.013	0.003	-0.113	0.004
2001.502	-0.026	0.002	-0.068	0.003
2002.252	-0.013	0.005	0.003	0.007
2002.334	-0.007	0.003	0.016	0.004
2002.408	0.009	0.003	0.023	0.005
2002.575	0.032	0.002	0.016	0.003
2002.650	0.037	0.002	0.009	0.003
2003.214	0.072	0.001	-0.024	0.002
2003.353	0.077	0.002	-0.030	0.002
2003.454	0.081	0.002	-0.036	0.002

Pitanja



- **dr Milan Milošević**

Departman za fiziku
Prirodno-matematički fakultet

- mmilan@svetnauke.org
www.facebook.com/mmilan
<https://www.instagram.com/mmilan81/>

- **Svet nauke**
www.svetnauke.org
www.facebook.com/svetnauke.org

- **Departman za fiziku PMF-a**
<https://fizika.pmf.ni.ac.rs>
www.facebook.com/fizika.nis

- **Astronomsko društvo Alfa**
<https://www.alfa.org.rs>
www.facebook.com/alfa.nis



Preuzmite
prezentaciju
www.mmilan.com

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{abn}{2}$$
$$\frac{a^3}{T^2} = M$$